MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques appliquées – informatique de la classe d'ECG 1ère année

Table des matières

INTRODUCTION **4**

1 Objectifs généraux de la formation **4**

2 Compétences développées **4**

3 Architecture des programmes **5**

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PREMIER SEMESTRE **7**

I - Raisonnement et vocabulaire ensembliste **7**

1 - Eléments de logique 7

2 - Raisonnement par récurrence 7

3 - Ensembles, applications 8

a) Ensembles, parties d'un ensemble 8

b) Applications 8

II - Calcul matriciel et résolution de systèmes linéaires **8**

1 - Systèmes linéaires 9

2 - Calcul matriciel 9

a) Définitions 9

b) Opérations matricielles 9

III - Théorie des graphes **10**

IV - Suites de nombres réels **10**

1 - Généralités sur les suites réelles 11

2 - Suites usuelles : formes explicites 11

3 - Convergence d'une suite réelle 11

4 - Comportement asymptotique des suites usuelles 12

V - Fonctions réelles d'une variable réelle **12**

1 - Compléments sur les fonctions usuelles 12

a) Fonctions polynômes 12

b) Fonction racine carrée, fonction inverse, fonctions puissances $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x}^{\alpha}$ 12

c) Fonction valeur absolue 13

d) Fonction partie entière 13

e) Fonctions logarithme et exponentielle 13

2 - Limite et continuité d'une fonction en un point 13

3 - Étude globale des fonctions d'une variable sur un intervalle . . . 14
4 - Représentations de graphes des fonctions d'une variable sur un intervalle. Régionnements du plan . . . 14

VI - Probabilités et stastistiques **15**
1 - Stastistiques univariées . . . 15
a) Généralités . . . 15
b) Etude d'une variable quantitative discrète . . . 15
2 - Événements . . . 15
3 - Coefficients binomiaux . . . 16
4 - Probabilité . . . 16
5 - Probabilité conditionnelle . . . 16
6 - Indépendance en probabilité . . . 17

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU SECOND SEMESTRE **17**

I - L'espace $\mathbf{R}^n$, sous-espaces vectoriels et applications linéaires **17**
a) Espace $\mathbf{R}^n$ . . . 17
b) Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ . . . 18
c) Applications linéaires de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$. . . . 18

II - Calcul différentiel et intégral **18**
1 - Calcul différentiel . . . 19
a) Dérivation . . . 19
b) Dérivées successives . . . 19
c) Convexité . . . 19
2 - Représentations de graphes des fonctions d'une variable sur un intervalle . . . 20
3 - Équations différentielles linéaires à coefficients constants. . . . 20
4 - Intégration sur un segment . . . 21
a) Définition . . . 21
b) Propriétés de l'intégrale . . . 21
c) Techniques de calcul d'intégrales . . . 22

III - Étude élémentaire des séries **22**
1 - Séries numériques à termes réels . . . 22
2 - Séries numériques usuelles . . . 23

IV - Probabilités - Variables aléatoires réelles **23**
1 - Espace probabilisé . . . 23
2 - Généralités sur les variables aléatoires réelles . . . 24

3 - Variables aléatoires discrètes 24
a) Variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{R}$ 24
b) Moments d'une variable aléatoire discrète 24
4 - Lois usuelles 25
a) Lois discrètes finies 25
b) Lois discrètes infinies 25

ENSEIGNEMENT ANNUEL D'INFORMATIQUE ET ALGORITHMIQUE 26

I - Programme du premier semestre. 26
1 - Algorithmique des listes 26
2 - Statistiques descriptives et analyse de données. 26
3 - Approximation numérique 27

II - Programme du deuxième semestre. 27
1 - Graphes finis, plus courts chemins 27
2 - Simulation de phénomènes aléatoires 27

III - Annexe : Langage Python 27
1 - Types de base 27
2 - Structures de contrôle 27
3 - Listes 28
4 - Utilisation de modules, de bibliothèques 28
a) Dans la bibliothèque `numpy` 28
b) Dans la librairie `numpy.linalg` 29
c) Dans la librairie `numpy.random` 29
d) Dans la librairie `matplotlib.pyplot` 29
e) Dans la librairie `pandas` 29

INTRODUCTION

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, sciences sociales...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent également certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif de ce programme est de permettre de façon équilibrée :

— une formation par les mathématiques : une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthése, ...) ;

— l'acquisition d'outils utiles notamment en sciences sociales et en économie (probabilités statistiques, optimisation) ;

— une culture sur les enjeux actuels et sur les techniques afférentes de l'informatique en lien avec des problématiques issues des sciences sociales ou économiques et l'acquisition mesurée de la démarche algorithmique pour résoudre un problème ou simuler une situation non triviale en lien avec la pratique d'un langage de programmation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'intérêt et l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques ou informatiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.

- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique ou une démarche algorithmique.

3 Architecture des programmes

Le niveau de référence à l'entrée de la filière EC est celui du cours de mathématiques complémentaires de la classe de terminale. Le programme de mathématiques appliquées s'inscrit dans le même esprit, résolument tourné vers l'utilisation d'outils mathématiques et informatiques pour résoudre des problématiques concrètes, tout en maintenant un apprentissage mathématique solide et rigoureux. On privilégie autant que possible les références aux autres disciplines pour motiver l'introduction d'outils mathématiques ou informatiques et en souligner l'efficacité.

Il est indispensable que chaque enseignant ait une bonne connaissance des programmes du cours de spécialité mathématiques de la classe de première et du cours de mathématiques complémentaires de terminale, afin que ses approches pédagogiques ne soient pas en rupture avec l'enseignement qu'auront reçu les étudiants.

Le programme s'organise autour de points forts qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- L'algèbre linéaire est abordé par le biais du calcul : systèmes d'équations linéaires, calcul matriciel. Les espaces vectoriels présentés sont tous équipés d'une base naturelle. L'espace vectoriel, comme objet abstrait, n'est pas au programme.
- La théorie des graphes est un outil de modélisation très utilisé. Elle permet de mettre en œuvre le calcul matriciel et de le mettre en situation sur des algorithmes.
- L'analyse vise à mettre en place les méthodes courantes de travail sur les suites et les fonctions et permet de développer la rigueur. On s'attache principalement à développer l'aspect opératoire. On n'insiste donc ni sur les questions trop fines ou spécialisées ni sur les exemples pathologiques. On évite les situations conduisant à une trop grande technicité calculatoire.
  L'étude des séries va permettre l'étude des variables aléatoires discrètes. Celle des intégrales généralisées n'est pas au programme de la première année. Il est à noter que, dans ce programme, les comparaisons des suites, séries et des fonctions en termes de négligeabilité et d'équivalents ne seront traitées qu'en seconde année.
- Les équations différentielles sont présentées dans le cadre d'études de phénomènes d'évolution en temps continu, adossées si possible à leur version discrète en termes de suites. On met en avant les aspects mathématiques de la notion d'équilibre.
- Les probabilités s'inscrivent dans la continuité de la formation initiée dès la classe de troisième et poursuivie jusqu'en terminale.
  On considèrera des espaces probabilisés finis au premier semestre, plus généraux au second semestre.
- L'algorithmique s'inscrit naturellement dans la démarche de résolution de problèmes. Les activités de programmation qui en résultent constituent un aspect essentiel de l'apprentissage de l'informatique. Des exemples ou des exercices d'application sont choisis pour leur intérêt dans les autres disciplines ou pour leur importance stratégique (l'analyse de données).

L'utilisation du langage Python est enseigné tout au long de l'année en lien direct avec le programme. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de visualiser concrètement les résultats obtenus grâce aux concepts et outils mathématiques enseignés et de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple l'analyse de graphes, de la simulation de lois de probabilité, de la recherche de valeurs approchées en analyse, du traitement de calculs matriciels en algèbre linéaire.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. Les probabilités permettent en particulier d'utiliser certains résultats d'analyse (suites, séries, intégrales, ...) et d'algèbre linéaire et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Dans le contenu du premier semestre, figurent les notions nécessaires et les objets de base qui serviront d'appui à la suite du cours. Ces éléments sont accessibles à tous les étudiants quelles que soient les pratiques antérieures et potentiellement variables de leurs lycées d'origine, et la spécialité choisie en classe de terminale. Ces contenus vont, d'une part, permettre une approche plus approfondie et rigoureuse de concepts déjà présents mais peu explicités en classe de terminale, et d'autre part, mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de la formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme admis, la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Les créneaux horaires dédiés à l'informatique sont consacrés au programme d'informatique. L'objectif est, en continuité avec les apprentissages du lycée, de permettre aux étudiants d'acquérir les bases de la démarche algorithmique, puis une mise en œuvre tournée vers la résolution de problèmes ainsi que l'illustration ou la modélisation de situations concrètes en lien avec les problématiques des sciences économiques et sociales. Le langage de programmation de référence choisi pour ce programme est Python. Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les notions de mathématiques pouvant être traitées en liaison avec l'informatique.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PREMIER SEMESTRE

I - Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Ce chapitre présente des points de vocabulaire, des notations, ainsi que certains types de raisonnement (par l'absurde, par contraposée, par récurrence...) et de démonstrations (d'implications, d'équivalences, d'inclusions...) dont la maîtrise s'avère indispensable à une argumentation rigoureuse sur le plan mathématique.

Le contenu de ce chapitre ne doit pas faire l'objet d'un exposé théorique. Les notions seront introduites progressivement au cours du semestre en utilisant celles déjà acquises au lycée, et à l'aide d'exemples variés issus des différents chapitres étudiés, pourront être renforcées au-delà, en fonction de leur utilité.

1 - Eléments de logique

Les étudiants doivent savoir :

• utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » ;

• utiliser à bon escient les quantificateurs universel et existentiel ; repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;

Notations : $\exists$, $\forall$.
Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs à des fins d'abréviation est exclu.

• distinguer dans le cas d'une proposition conditionnelle la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;

• utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;

• formuler la négation d'une proposition ;

• utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;

• reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

2 - Raisonnement par récurrence

Apprentissage et emploi du raisonnement par récurrence.

On commence par le mettre en œuvre sur des exemples élémentaires. Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.

Notations $\sum$, $\prod$.	Illustration par manipulation de sommes et de produits. ▶ Formules donnant : $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Les étudiants doivent savoir employer les notations $\sum_{i=1}^{n} u_i$ et $\sum_{\alpha \in A} u_\alpha$ où A désigne un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$ ou de $\mathbf{N}^2$.

3 - Ensembles, applications

L'objectif de cette section est d'acquérir ou de consolider le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications, mais tout exposé théorique est exclu.

a) Ensembles, parties d'un ensemble

Ensemble, élément, appartenance. Sous-ensemble (ou partie), inclusion. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Réunion. Intersection.	On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels (« et », « ou »).
Complémentaire. Complémentaire d'une union et d'une intersection.	Le complémentaire d'une partie A de E est noté $\bar{A}$.
Produit cartésien.	On introduira les notations $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$.

b) Applications

Définition.	
Composition. Injection, surjection, bijection, application réciproque.	Ces notions seront introduites sur des exemples simples, toute manipulation trop complexe étant exclue. La notion d'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée n'est pas un attendu du programme.
Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	On pourra donner des exemples issus du cours d'analyse.

II - Calcul matriciel et résolution de systèmes linéaires

L'objectif de cette partie du programme est :
− d'une part d'initier au calcul matriciel afin de permettre la résolution de problèmes issus, notamment, des probabilités ;
− d'autre part de parvenir à une bonne maîtrise de la résolution des systèmes linéaires et de les interpréter sous forme matricielle.
L'étude de ce chapitre sera menée en lien avec l'informatique. ▶
On introduit la problématique des systèmes linéaires, puis on présente l'utilité de l'écriture matricielle en utilisant des exemples simples de tableaux entrée-sortie ou des tableaux de Leontieff.

Tout développement théorique est hors programme.

1 - Systèmes linéaires

Définition d'un système linéaire.	
Système homogène, système de Cramer.	
Résolution par la méthode du pivot de Gauss.	La méthode sera présentée à l'aide d'exemples. On donnera des exemples où il existe une solution unique, où il n'existe pas de solution et où il existe plusieurs solutions.
Ensemble des solutions d'un système linéaire.	On insiste sur les propriétés de stabilité de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène en vue de l'introduction de la notion de sous-espace vectoriel au second semestre

2 - Calcul matriciel

a) Définitions

Définition d'une matrice réelle à n lignes et p colonnes. Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. Matrices colonnes, matrices lignes. Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Matrices triangulaires, diagonales. Matrice identité.	
Transposée d'une matrice. Matrices symétriques.	Notation ${}^tA$. On caractérisera les matrices symétriques à l'aide de la transposée.

b) Opérations matricielles

Somme, produit par un nombre réel, produit. Propriétés des opérations. Transposée d'une somme, d'un produit de matrices carrées.	On pourra faire le lien entre le produit AB et le produit de A avec les colonnes de B. $\boxed{\blacktriangleright}$
Opérations sur les matrices carrées ; puissances.	Exemples de calcul des puissances n-èmes d'une matrice carrée ; application à l'étude de suites réelles satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants. $\boxed{\blacktriangleright}$ La formule du binôme n'est pas un attendu du programme du premier semestre.
Matrices inversibles. Inverse d'un produit.	On admettra que pour une matrice carrée, un inverse gauche ou droit est l'inverse.

Écriture matricielle $AX = Y$ d'un système linéaire. Unicité de la solution lorsque la matrice A est inversible.	On pourra illustrer sur des exemples la recherche de l'inverse d'une matrice A par résolution du système $AX = Y$. Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Exemples d'utilisation d'un polynôme annulateur pour déterminer l'inverse.
Déterminant d'une matrice $(2, 2)$.	Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2.

III - **Théorie des graphes**

Un graphe fini est un outil simple et efficace de modélisation. Les graphes sont utilisés en sciences sociales pour la modélisation des réseaux sociaux et en économie pour des modèles d'évolution. On introduit des exemples importants comme le graphe du web ou ceux de différents réseaux sociaux en indiquant dans la mesure du possible la taille. Un graphe est peut être représenté par sa matrice d'adjacence et le calcul matriciel en permet une analyse qui peut s'interpréter concrètement. Cette analyse est choisie en première approche $\boxed{\blacktriangleright}$.

Graphes, sommets, sommets adjacents, arêtes.	Un graphe peut être orienté ou non.
Matrice d'adjacence.	La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique. On donne des exemples (graphe eulérien, graphe complet,...) avec leurs matrices.
Chaîne (chemin). Longueur d'une chaîne (d'un chemin). Si A est la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G, le $(i, j)-$ème coefficient de la matrice A^d est le nombre de chemins de longueur d du sommet i au sommet j.	
Graphe connexe.	Si A est la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G à n sommets, A est connexe si et seulement si la matrice $I_n + A + \cdots + A^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs.
Degré d'un sommet.	Formule d'Euler (dite des poignées de main).
Analyse des réseaux sociaux	On introduira sur des exemples simples quelques mesures utilisées dans l'analyse de réseaux sociaux et leur interprétation (recherche d'influenceurs...) comme le degré de centralité ou le degré d'intermédiarité de chaque sommet. Ces notions ne sont pas exigibles.

IV - **Suites de nombres réels**

L'étude des suites numériques au premier semestre permet aux étudiants de consolider la notion de suite réelle et de convergence abordée en classe terminale. Tout exposé trop théorique sur ces notions est à exclure.
Cette première approche des suites élargit la conception de la notion de fonction.
Les calculs d'intérêts, d'amortissement ou de multiplicateurs keynesiens peuvent les mettre en situation.
L'étude des suites classiques pourra être motivée puis se faire en lien étroit avec la partie probabilités

pour mettre en avant l'utilité de cet outil numérique.
On utilisera autant que possible la représentation graphique des suites pour illustrer ou conjecturer leur comportement, en particulier pour illustrer la notion de convergence. ▶

1 - Généralités sur les suites réelles

Définitions, notations.
Exemples de définitions : par formules récursives ou explicites, par restriction d'une fonction de variable réelle aux entiers.

2 - Suites usuelles : formes explicites

Suite arithmétique, suite géométrique.	Formule donnant $\sum_{k=0}^{n} q^k$. Calculs de sommes portant sur les suites arithmétiques et géométriques.
Suite arithmético-géométrique.	Les étudiants devront savoir se ramener au cas d'une suite géométrique.
Suite vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.	On se limitera au cas où l'équation caractéristique a des racines réelles. ▶

3 - Convergence d'une suite réelle

Aucune démonstration concernant les résultats de cette section n'est exigible.

Limite d'une suite, suites convergentes.	$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ, élément de $\mathbf{R}$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient les termes u_n pour tous les indices n, hormis un nombre fini d'entre eux.
Généralisation aux limites infinies. Unicité de la limite.	
Opérations algébriques sur les suites convergentes. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.	Aucune technicité sur ces opérations ne sera exigée.
Existence d'une limite par encadrement. Suites monotones.	
Théorème de la limite monotone.	Toute suite croissante (respectivement décroissante) et majorée (respectivement minorée) converge. Toute suite croissante (respectivement décroissante) non majorée (respectivement non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) .
Suites adjacentes.	Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.
Si les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes vers une même limite ℓ, la suite (u_n) converge vers ℓ.	

4 - Comportement asymptotique des suites usuelles

Croissances comparées.	Comparaison des suites (n^a), (q^n), $((\ln(n))^b)$. Résultats admis.

V - Fonctions réelles d'une variable réelle

Il s'agit, dans ce chapitre, de fournir aux étudiants un ensemble de connaissances de référence sur les fonctions usuelles et quelques théorèmes sur les fonctions d'une variable réelle. On utilisera autant que possible la représentation graphique des fonctions pour illustrer ou conjecturer ces résultats, qui prennent tout leur sens dans une synthèse récapitulative.
Le champ des fonctions étudiées se limite aux fonctions usuelles et à celles qui s'en déduisent de façon simple. On se restreindra aux fonctions définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$. *Les fonctions trigonométriques sont hors programme.*
L'analyse reposant largement sur la pratique des inégalités, on s'assurera que celle-ci est acquise à l'occasion d'exercices.

Aucune démonstration concernant les résultats de ce chapitre n'est exigible.

1 - Compléments sur les fonctions usuelles

a) Fonctions polynômes

La construction des polynômes formels n'est pas au programme. On confond un polynôme avec sa fonction polynomiale.

Degré, somme et produit de polynômes.	Par convention, $\deg 0 = -\infty$.
Ensemble $\mathbf{R}[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$, ensembles $\mathbf{R}_n[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$ de degré au plus n.	
Racines d'un polynôme. Factorisation par $(x-a)$ dans un polynôme ayant a comme racine.	Application : un polynôme de $\mathbf{R}_n[x]$ admettant plus de $n+1$ racines distinctes est nul. Pratique, sur des exemples, de la division euclidienne. $\boxed{\blacktriangleright}$
Trinômes du second degré.	Discriminant d'un trinôme du second degré. Factorisation dans le cas de racines réelles. Lorsqu'il n'y a pas de racine réelle, le signe du trinôme reste constant sur $\mathbf{R}$. Relation entre les coefficients du polynôme et la somme et le produit des racines. Relation entre les signes des coefficients du polynôme et les signes de ses racines.

b) Fonction racine carrée, fonction inverse, fonctions puissances $x \longmapsto x^\alpha$

Définitions ; notations, propriétés, représentations graphiques.	On fera une étude détaillée des fonctions puissances. Les étudiants doivent connaître les règles de calcul sur les puissances.

c) Fonction valeur absolue

Définition. Propriétés, représentation graphique.

Lien avec la distance sur $\mathbf{R}$.
On insistera sur la fonction valeur absolue.

d) Fonction partie entière

Définition. Représentation graphique.

Notation $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.
La notation E est réservée à l'espérance mathématique.

e) Fonctions logarithme et exponentielle

Rappel des propriétés. Positions relatives des courbes représentatives de $\ln, \exp, x \longmapsto x$.

Par le biais d'exercices, étude de fonctions du type $x \longmapsto u(x)^{v(x)}$.

2 - Limite et continuité d'une fonction en un point

Définition de la limite d'une fonction en un point et de la continuité d'une fonction en un point.
Unicité de la limite.
Limite à gauche, limite à droite. Extension au cas où la fonction est définie sur $I \setminus \{x_0\}$.

Extension de la notion de limite en $\pm\infty$ et aux cas des limites infinies.

On adoptera la définition suivante : f étant une fonction définie sur un intervalle I, x_0 étant un réel élément de I ou une extrémité de I, et ℓ un élément de $\mathbf{R}$, on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$; dans ce cas, lorsque x_0 appartient à I, cela signifie que f est continue au point x_0 et, dans le cas contraire, que f se prolonge en une fonction continue au point x_0.

Opérations algébriques sur les limites.
Compatibilité du passage à la limite avec les relations d'ordre.
Existence d'une limite par encadrement.
Limite d'une fonction composée.
Si f est une fonction définie sur un intervalle I admettant une limite ℓ en un point x_0, et si (u_n) est une suite d'éléments de I convergeant vers x_0, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

Études asymptotiques des fonctions exponentielle et logarithme.

Comparaison des fonctions exponentielle, puissance et logarithme au voisinage de $+\infty$ et des fonctions puissance et logarithme au voisinage de 0.

Croissances comparées

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^a \ln(x)^b$, $\lim\limits_{x \to 0} x^a |\ln(x)|^b$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |x|^a \mathrm{e}^{bx}$.

Les notions d'équivalence et de négligeabilité ne seront abordées qu'en deuxième année.

3 - Étude globale des fonctions d'une variable sur un intervalle

On insistera sur les représentations graphiques. On s'appuiera sur les fonctions de référence pour illustrer les notions de cette section.

Fonctions paires, impaires. Fonctions majorées, minorées, bornées. Fonctions monotones.	
Théorème de la limite monotone.	Toute fonction monotone sur $]a,b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]a,b[$. Comportement en a et b.
Fonctions continues sur un intervalle. Opérations algébriques, composition.	
Théorème des valeurs intermédiaires. L'image d'un intervalle (respectivement un segment) par une fonction continue est un intervalle (respectivement un segment).	Résultat admis. Notations : $\max\limits_{t\in[a,b]} f(t)$ et $\min\limits_{t\in[a,b]} f(t)$. On illustrera ces résultats par des représentations graphiques et on montrera comment les mettre en évidence sur un tableau de variations.
Théorème de la bijection.	Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.
Continuité et sens de variation de la fonction réciproque. Représentation graphique de la fonction réciproque.	On utilisera ces résultats pour l'étude des équations du type $f(x) = k$. En liaison avec l'algorithmique, méthode de dichotomie. $\boxed{\blacktriangleright}$.

4 - Représentations de graphes des fonctions d'une variable sur un intervalle. Régionnements du plan

Il s'agit de revenir et d'utiliser les notions du paragraphe d'analyse en les illustrant sur des exemples. On pourra utiliser quelques exemples issus du cours de micro-économie (modèle de l'équilibre entre offre et demande, économies d'échelle...) $\boxed{\blacktriangleright}$

Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions.	Etude locale, variations, monotonie ou convexité.
Positions relatives de deux courbes.	On pourra utiliser des exemples issus du cours de micro-économie, comme la loi de l'offre et la demande, et donner des interprétations de déplacement des courbes.
Représentations graphiques dans le plan de l'ensemble des solutions d'une inéquation du type $y > f(x)$ ou $y \geqslant f(x)$.	Exemples de régionnements.

VI - **Probabilités et stastistiques**

1 - Stastistiques univariées

a) Généralités

La plupart des notions abordées dans ce paragraphe ont été abordées les années précédentes. Il s'agira ici d'encourager les étudiants à choisir les représentations graphiques et les indicateurs étudiés pour leur pertinence et de travailler leur esprit critique. L'enseignement de ce chapitre doit impérativement avoir lieu en lien étroit avec l'informatique afin de manipuler des données réelles issues du domaine de l'économie ou des sciences sociales. ▶

Introduction.	On introduira brièvement le chapitre en expliquant les rôles des différentes étapes d'une étude statistique : statistique descriptive, statistique inférentielle.
Population, individu, échantillon, variable statistique. Variable quantitative discrète, continue, variable qualitative.	Il s'agit ici d'introduire le vocabulaire adapté pour l'étude d'une série statistique.
Série statistique associée à un échantillon.	Série statistique de taille n portant sur un caractère. n-uplet des observations.

b) Etude d'une variable quantitative discrète

Dans cette section, les séries statistiques étudiées seront des séries quantitatives discrètes.

Description d'une série statistique discrète : effectifs, fréquences, fréquences cumulées.	Diagramme des fréquences cumulées.
Fonction de répartition et quantiles.	Boîte à moustaches. (on pourra comparer des échantillons grâce au résumé de leurs séries statistiques).
Indicateurs de tendance centrale : moyenne $\bar{x}$ et médiane d'une série statistique. Définitions et propriétés de la moyenne et de la médiane.	Propriétés de la moyenne et la médiane par transformation affine.
Caractéristiques de dispersion : étendue, écart interquartile.	On discutera selon les données étudiées de la pertinence des différents indicateurs choisis.
Variance s_x^2 et écart-type s_x d'une série statistique : définitions et propriétés. Formule de Koenig.	Pour un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ on définit la variance empirique par : $s_x^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

2 - Événements

Expérience aléatoire. Univers Ω des résultats observables.	On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples où l'univers Ω des résultats possibles est fini, et où $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements.

Événements, événements élémentaires, opérations sur les événements, événements incompatibles.	On fera le lien entre ces opérations sur les événement et les connecteurs logiques.
Système complet d'événements fini.	Une famille $(A_i)_{i\in I}$, où I est un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$, est un système complet si elle vérifie les deux conditions suivantes : • $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ • $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$.

3 - Coefficients binomiaux

Factorielle, notation $n!$.	Interprétation de $n!$ en tant que nombre de bijections d'ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments $\boxed{\blacktriangleright\ .}$
Coefficients binomiaux, notation $\binom{n}{p}$. Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.	Nombre de chemins d'un arbre réalisant p succès pour n répétitions. Relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
Formule du triangle de Pascal.	La formule de Pascal fournit un algorithme de calcul efficace pour le calcul numérique des coefficients binomiaux. $\boxed{\blacktriangleright}$
$\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.	On pourra démontrer cette formule par récurrence à partir de la formule du triangle de Pascal.

4 - Probabilité

Définition d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.	On restreint, la notion de probabilité à une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant : • pour tous A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ • $P(\Omega) = 1$. Cas de l'équiprobabilité.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.	Généralisation à la réunion de 3 événements.

5 - Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle.	Notation P_A.
Formule des probabilités composées.	• Si $P(A) \neq 0,\ P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$. • Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$, $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1\cap A_2\cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

Formule des probabilités totales	Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements fini, alors pour tout événement B : $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B\cap A_i)$. Si de plus, pour tout i ($1 \leqslant i \leqslant n$), $P(A_i) \neq 0$, on a : $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)$.
Formule de Bayes.	On donnera de nombreux exemples d'utilisation de ces formules.

6 - Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements.	Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.
Indépendance mutuelle de n événements ($n \in \mathbf{N}^*$). Si n événements A_i sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.	

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU SECOND SEMESTRE

I - L'espace $\mathbf{R}^n$, sous-espaces vectoriels et applications linéaires

Ce chapitre ne doit pas donner lieu à un exposé théorique ; on donne ici une approche concrète à des notions. Pour simplifier ce premier contact, l'étude se limitera à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, en privilégiant les exemples pour $n \in \{2, 3, 4\}$.

a) Espace $\mathbf{R}^n$

Définition de $\mathbf{R}^n$. Loi interne $+ : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Loi externe $\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Propriétés d'associativité et de distributivité. Combinaisons linéaires.	On privilégiera le travail sur les espaces $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4$. On introduira un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ comme matrice des coordonnées d'un vecteur de $\mathbf{R}^n$ dans la base canonique.
Base canonique de $\mathbf{R}^n$.	Les espaces vectoriels ci-dessus sont naturellement équipés de leur base canonique.

b) Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$

Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$.	Un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs. On remarque qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ est stable par combinaisons linéaires. On classifiera les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$.
L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel.	On reviendra sur l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à $2, 3, 4$ inconnues.
Sous-espace vectoriel engendré.	Notation $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.
Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.	
Base d'un sous-espace vectoriel.	$(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une base du sous-espace vectoriel F de E si et seulement si tout vecteur de F se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire de $(u_1, u_2, \dots, u_p)$.
Si un sous-espace vectoriel admet une base constituée de p vecteurs, toute autre base a p vecteurs. Dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.	Théorème admis.
Famille libre d'un sous-espace vectoriel de dimension n. Résultats admis.	Cardinal d'une famille libre (respectivement génératrice) d'un sous-espace vectoriel de dimension n.
Une famille libre (respectivement génératrice) à n vecteurs d'un sous-espace vectoriel de dimension n est une base.	Résultats admis.
Rang d'une famille de vecteurs.	

c) Applications linéaires de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$.

Noyau.	Le noyau d'une matrice est un sous-espace vectoriel.
Rang d'une matrice.	Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.
$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.	Résultat admis.
Etude de l'application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ définie par une matrice M.	$(X \to MX)$
Composition.	Produit matriciel.
Noyau et image d'une application linéaire.	
Théorème du rang.	Résultat admis.

II - **Calcul différentiel et intégral**

Le but de ce chapitre est de mettre en place les méthodes courantes de travail sur les fonctions. Aucune démonstration concernant les résultats de ce chapitre n'est exigible.

1 - Calcul différentiel

a) Dérivation

Dérivée en un point. Tangente au graphe en un point. Dérivée à gauche, à droite.	Notation $f'(x)$. $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$. On fera le lien entre cette formule et l'équation de la tangente au point x. Limites des taux d'accroissement de la fonction exponentielle, de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ et des fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.
Fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée.	Notation f'.
Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions puissances. Dérivée des fonctions composées.	On évitera tout excès de technicité dans les calculs de dérivées.
Inégalités des accroissements finis.	Si $\lvert f'\rvert \leqslant k$ sur un intervalle I, alors : $\forall (a,b) \in I^2, \quad \lvert f(b) - f(a)\rvert \leqslant k\lvert b-a\rvert$. Application, sur des exemples, à l'étude de suites récurrentes du type : $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque $\lvert f'\rvert \leqslant k < 1$. ▶ Tout exposé théorique sur les suites récurrentes générales est exclu.
Caractérisation des fonctions constantes et monotones par le signe de la dérivée.	Résultat admis. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geqslant 0$ sur I, f' ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
Extremum local d'une fonction dérivable.	Une fonction f, dérivable sur un intervalle ouvert I, admet un extremum local en un point de I si sa dérivée s'annule en changeant de signe en ce point.

b) Dérivées successives

Fonctions 2 fois dérivables.
Fonctions de classe C^1, C^2, C^∞.
Opérations algébriques.

c) Convexité

Les fonctions convexes sont des outils de modélisation en économie. On pourra s'appuyer sur un exemple simple (par exemple, une fonction de coût) pour en motiver la définition. Tous les résultats de cette section seront admis. Les fonctions étudiées sont au moins de classe C^2.

Définition d'une fonction convexe.	Une fonction est convexe sur un intervalle I si : $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0,1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$, $$f(t_1x_1 + t_2x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$ Interprétation géométrique. ▶
Fonctions concaves.	
Points d'inflexion.	
Caractérisation des fonctions convexes de classe C^2.	Si f est de classe C^2, f est convexe si et seulement si l'une de ces deux propositions est vérifiée : • f' est croissante ; • f" est positive ; • C_f est au-dessus de ses tangentes.
Caractérisation des fonctions concaves de classe C^2.	
Si la dérivée d'une fonction convexe f de classe C^2 sur un intervalle ouvert s'annule en un point, f admet un minimum en ce point.	
Représentation graphique d'une fonction convexe.	▶

2 - Représentations de graphes des fonctions d'une variable sur un intervalle

Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions.	Allure locale du graphe. Exemples de points d'inflexion.

3 - Équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Les modèles mathématiques utilisés pour étudier des phénomènes dynamiques peuvent être à temps discret ou à temps continu. La problématique de modélisation en temps continu sera mise en place à l'aide des équations différentielles linéaires à coefficients constants. On donnera l'exemple de l'équation différentielle logistique sans insister sur les difficultés techniques, en lien avec le modèle de Solow. On introduit la notion d'équilibre, une situation qui n'évolue pas et qu'on obtient le plus souvent comme l'aboutissement du phénomène évolutif.

Résolution de $y' + ay = b(t)$ où a est un nombre réel et b est une fonction continue sur un intervalle de $\mathbf{R}$.	Cas particulier où b est constante.
Équation homogène, solution particulière.	On remarque que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est stable par combinaisons linéaires.
Résolution de $y'' + ay' + by = c$ où a, b et c sont des nombres réels. Équation homogène, solution particulière.	On se restreint au cas où l'équation caractéristique a des racines réelles. On remarque que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est stable par combinaisons linéaires.

Exemples de résolution d'équations $y''+ay'+by = c(t)$ où a, b et c est une fonction continue sur un intervalle de **R**.	On se restreint au cas où l'équation caractéristique a des racines réelles.
Principe de superposition.	La recherche d'une solution particulière doit être accompagnée.
Trajectoires.	On remarque qu'une trajectoire est uniquement déterminée par ses conditions initiales et que deux trajectoires différentes sont d'intersection vide. ▶
Équilibre.	Une trajectoire d'équilibre est constante. On constatera sur des exemples que si une trajectoire converge lorsque t tend vers $+\infty$, elle converge vers un équilibre. ▶

4 - Intégration sur un segment

On introduit ce chapitre en rappelant le lien entre la notion de primitive et l'aire sous la courbe estimée par la méthode des rectangles vue en terminale.

a) Définition

Aire sous la courbe d'une fonction positive.	Dans le cas où f est continue monotone, on constatera que cette fonction « aire sous la courbe » admet f pour dérivée.
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.	
Toute fonction continue sur un intervalle admet, sur cet intervalle, au moins une primitive.	Admis.
Intégrale d'une fonction continue sur un segment. Relation de Chasles.	Si f est continue sur un intervalle I, pour tout $(a, b) \in I^2$, on définit l'intégrale de f de a à b par : $$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$ où F est une primitive de f sur I. Cette définition est indépendante du choix de la primitive F de f sur I.

b) Propriétés de l'intégrale

Linéarité de l'intégrale.
L'intégrale d'une fonction positive sur un segment est positive.
L'intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment est nulle si et seulement si la fonction est identiquement nulle sur le segment.

Si $a \leqslant b$,

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Résultat admis
On enseignera aux étudiants à majorer et à minorer des intégrales par utilisation de cette inégalité ou par intégration d'inégalités.

c) Techniques de calcul d'intégrales

On évitera tout excès de technicité pour les calculs d'intégrales par changement de variable.

Calcul de primitives « à vue », déduites de la reconnaissance de schémas inverses de dérivation.

On insistera sur le modèle $u'(x)u(x)^\alpha$ ($\alpha \neq -1$ ou $\alpha = -1$).

Intégration par parties. Changement de variables.

On se restreindra à des changements de variables C^1 strictement monotones.
Les changements de variables autres qu'affines seront précisés dans les exercices.
On pourra à titre d'exemples étudier des suites définies par une intégrale et des fonctions définies par une intégrale.

III - Étude élémentaire des séries

Ce chapitre fait suite au chapitre sur les suites numériques réelles du premier semestre, une série étant introduite comme une suite de sommes partielles. Aucune technicité n'est exigible en première année. L'étude des variables aléatoires discrètes sera l'occasion d'une mise en œuvre naturelle de ces premières connaissances sur les séries. L'étude des séries sera complétée en seconde année par les techniques de comparaison sur les séries à termes positifs.

1 - Séries numériques à termes réels

Série de terme général u_n.
Sommes partielles associées.

Définition de la convergence.
Combinaison linéaire de séries convergentes.

$\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ converge si $\sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.
On pratiquera, sur des exemples simples, l'étude des séries (convergence, calcul exact ou approché de la somme).
On soulignera l'intérêt de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ pour l'étude de la suite (u_n). $\boxed{\blacktriangleright}$

Série à termes positifs.

Convergence absolue.

En première année, cette notion est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

La convergence absolue implique la convergence.

Résultat admis.

2 - Séries numériques usuelles

Étude des séries $\sum q^n, \sum nq^{n-1}$, $\sum n(n-1)q^{n-2}$ et calcul de leurs sommes.

Convergence et somme de la série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$.

Résultats admis.

IV - Probabilités - Variables aléatoires réelles

Dans ce chapitre, on généralise l'étude faite au premier semestre ; le vocabulaire général est adopté et complété (en particulier le vocabulaire « espace probabilisé » et la notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$), mais aucune difficulté théorique sur l'ensemble des événements ne sera soulevée dans ce cadre. On n'emploiera pas le terme tribu.
L'étude des variables aléatoires et notamment celles associées aux lois usuelles se fera en lien étroit avec la partie informatique du programme. ▶
L'étude des variables aléatoires discrètes se fera dans la mesure du possible en tant qu'outil de modélisation de problèmes concrets.

1 - Espace probabilisé

On généralisera dans ce paragraphe l'étude effectuée lors du premier semestre sans soulever de difficultés théoriques.

Univers Ω des issues d'une expérience et ensemble des événements $\mathcal{A}$.

L'ensemble des événements contient Ω, est stable par union, par intersection dénombrable et par passage au complémentaire.

Généralisation de la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω.
Généralisation de la notion de probabilité.

Généralisation de la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω.
Généralisation de la notion de probabilité conditionnelle.
Généralisation de la formule des probabilités composées.
Généralisation de la formule des probabilités totales.
Indépendance mutuelle d'une suite infinie d'événements.

2 - Généralités sur les variables aléatoires réelles

Définition d'une variable aléatoire réelle.	X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si X est une application de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que pour tout élément x de $\mathbf{R}$, $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$. Démontrer que X est une variable aléatoire ne fait pas partie des exigibles du programme. Notations $[X \in I]$, $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc.
Système complet d'événements associé à une variable aléatoire.	

3 - Variables aléatoires discrètes

On ne soulèvera pas de difficulté théorique liée à l'ordre (convergence commutative d'une série absolument convergente) ou à la dénombrabilité.

a) Variable aléatoire discrète à valeurs dans R

Définition d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{R}$.	L'ensemble des valeurs prises par ces variables aléatoires sera indexé par une partie finie ou infinie de $\mathbf{N}$.
Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire discrète par la donnée des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.	
Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. Étude de la loi de $Y = g(X)$.	On se limite à des cas simples, tels que $g \ : \ x \longmapsto ax + b$, $g \ : \ x \longmapsto x^2$, ...

b) Moments d'une variable aléatoire discrète

Définition de l'espérance.	Quand $X(\Omega)$ est infini, une variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente. Notation $\mathrm{E}(X)$.
Linéarité de l'espérance. Positivité.	Résultats admis.
Variables aléatoires centrées.	
Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.	Quand $X(\Omega)$ est infini, $\mathrm{E}(g(X))$ existe si et seulement si la série $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ converge absolument, et dans ce cas $\mathrm{E}(g(X)) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$. Théorème admis.
$\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$.	
Variance, écart-type d'une variable aléatoire discrète.	Notations $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$.

Formule de Kœnig-Huygens.	$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$.
$\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$.	
Variables aléatoires centrées réduites.	On notera X^* la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

4 - Lois usuelles

a) Lois discrètes finies

Loi certaine.	Caractérisation par la variance.
Loi de Bernoulli. Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
Loi binomiale. Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. ▶
Application : formule du binôme de Newton donnant $(a + b)^n$.	Lorsque a et b sont strictement positifs, lien avec $\mathcal{B}(n, \frac{a}{a+b})$. La formule du binôme de Newton dans le cas général pourra être démontrée par récurrence.
Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Espérance, variance.	Application à l'étude de la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$, où $(a, b) \in \mathbf{N}^2$. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$. ▶

b) Lois discrètes infinies

Loi géométrique (rang d'apparition du premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire). Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. ▶ Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p), \forall k \in \mathbf{N}^*, P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.
Loi de Poisson. Espérance, variance Contexte d'utilisation.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On pourra remarquer que la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est loi « limite » (cette notion sera précisée en deuxième année) d'une suite de variables suivant la loi binomiale $B(n, \frac{\lambda}{n})$. ▶

ENSEIGNEMENT ANNUEL D'INFORMATIQUE ET ALGORITHMIQUE

I - Programme du premier semestre.

Les séances de travaux pratiques du premier semestre poursuivent les objectifs suivants :

- *consolider l'apprentissage de la programmation qui a été entrepris dans les classes du lycée en langage Python ;*
- *mettre en place une discipline de programmation : découpage modulaire à l'aide de fonctions et programmes, annotations et commentaires, évaluation par tests ;*
- *mettre en pratique des algorithmes facilitant le traitement de l'information, la modélisation, la simulation.*

1 - Algorithmique des listes

Il s'agit de présenter des algorithmes simples, spécifiés de façon abstraite, puis de les traduire dans un langage de programmation, ici Python. On utilisera ces activités pour construire une progression pour assimiler les notions de variables, de type, d'affectation, d'instruction conditionnelle, de boucles conditionnelles ou inconditionnelles et manipuler de façon simple les listes en Python. S'il n'est pas souhaitable de les formaliser, on dégagera de l'étude de ces algorithmes simples les problématiques de la correction et la terminaison des algorithmes. Ces notions ne sont pas exigibles.

Recherche séquentielle dans une liste.	Recherche d'un élément. Recherche du maximum, du second maximum.
Algorithmes opérant sur une structure séquentielle par boucles imbriquées.	Recherche des deux valeurs les plus proches dans une liste.
Algorithmes dichotomiques.	Recherche dichotomique dans une liste triée.
Algorithmes gloutons.	Rendu de monnaie. Allocation de salles pour des cours.

2 - Statistiques descriptives et analyse de données.

Dans ce paragraphe, on analysera des données statistiques publiques obtenues sous forme d'un fichier csv (Comma-separate-value). Pour ce faire, on pourra utiliser le site data.gouv ou le site de l'Insee et choisir des données socio-économiques. On travaille directement sur le fichier de données sous forme de table en important la bibliothèque `pandas` *ou après transformation directement sur un tableur. On indiquera aux étudiants les commandes à utiliser. Aucune de ces commandes de cette bibliothèque n'est exigible.*

Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.	
Exemples d'analyse des données.	On pourra faire des tris sélectifs, donner des exemples de calculs d'indicateurs de position : moyenne, médiane, mode, quantiles. ou d'indicateurs de dispersion : étendue, variance et écart-type empiriques, écart inter-quantile. On discutera la signification des résultats obtenus.
Représentations des données. Diagrammes en bâtons, histogrammes.	On pourra utiliser la bibliothèque `matplotlib`.

3 - Approximation numérique

Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x) = 0$.

On utilisera différentes méthodes dont certaines résulteront d'une étude mathématique (suites récurrentes, encadrements, dichotomie).

II - Programme du deuxième semestre.

1 - Graphes finis, plus courts chemins

Il s'agit de revenir sur le modèle des graphes et d'étudier les démarches algorithmiques permettant de les analyser selon leurs représentations.

Graphes.

Un graphe est implémenté à l'aide de listes d'adjacence (rassemblées par exemple dans une liste ou dans un dictionnaire) ou par sa matrice d'adjacence.

Recherche d'un plus court chemin dans un graphe pondéré avec des poids positifs.
Algorithme de Dijkstra.

2 - Simulation de phénomènes aléatoires

Simulation d'expériences aléatoires élémentaires conduisant à une loi usuelle.
Simulation de phénomènes aléatoires.

Loi binomiale, loi géométrique.

III - Annexe : Langage Python

Toute la richesse du langage Python ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi le paragraphe ci-dessous liste limitativement les éléments du langage Python (version 3 ou supérieure) dont la connaissance est exigible des étudiants. Il s'agit de la liste des commandes utiles pour les travaux pratiques des deux années de formation. Il n'y a pas lieu d'introduire en première année les commandes qui relèvent de notions de seconde année.

1 - Types de base

`+` `-` `*` `/` `**`	Opérations arithmétiques de base.
`==` `>` `<` `>=` `<=` `!=`	Comparaison, test.
`True` `False` `and` `or` `not`	Logique.
`from ... import *, import ... as`	Importation d'une bibliothèque.

2 - Structures de contrôle

Instruction d'affectation =.

Instruction conditionnelle `if`, `elif`, `else`.

Boucle `for` ; Boucle `while`.

Définition d'une fonction `def` $f(p_1, \ldots , p_n)$
`return`.

3 - Listes

Tableau unidimensionnel ou liste. Définitions d'une liste avec une boucle ou en compréhension. Fonction `range`. Commandes `append` , `len`.	Il n'y a pas lieu de distinguer ces deux structures de données en langage Python.
Recherche séquentielle dans une liste. Commandes `in del count`.	
Manipulations élémentaires de listes. Commandes + et $*$.	

4 - Utilisation de modules, de bibliothèques

`from ... import *, import ... as`	Importation d'une bibliothèque.

Pour le calcul numérique, le traitement statistique ou la simulation de phénomènes aléatoires, certaines bibliothèques s'avèrent utiles. Elles sont listées ci-dessous avec les fonctions pertinentes. Toute utilisation d'une telle fonction doit obligatoirement être accompagnée de la documentation utile, sans que puisse être attendue une quelconque maîtrise par les étudiants de ces éléments.

a) Dans la bibliothèque `numpy`

Exemple d'importation : `import numpy as np`

`np.array, np.zeros, np.ones, np.eye,` `np.linspace, np.arange`	Création de vecteurs et de matrices. Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne d'une matrice.
`+` | `-` | `*` | `/` | `**`	Opérations arithmétiques de base : coefficient par coefficient.
`==` | `>` | `<` | `>=` | `<=` | `!=`	Comparaison de deux matrices (`M == N`), comparaison d'une matrice et d'un nombre (`M>=1`).
`a,b = np.shape(M)`	Taille de la matrice `M`.
`np.dot, np.transpose`	Syntaxes exigibles : `np.transpose(M)`, `np.dot(M1,M2)`. L'usage de méthode comme `M.transpose()`, `M1.dot(M2)` est non-exigible.
`np.sum, np.min, np.max, np.mean,` `np.cumsum, np.median, np.var, np.std`	Ces opérations peuvent s'appliquer sur une matrice entière ou bien pour chaque colonne (ou chaque ligne). Exemple : `mean(M)`, `mean(M,0)`, `mean(M,1)`
`np.exp, np.log, np.sqrt, np.abs,` `np.floor`	Ces fonctions peuvent s'appliquer à des variables numériques ou vectoriellement (à des matrices ou vecteurs) élément par élément. On pourra utiliser la commande `f = np.vectorize(f)` mais elle n'est pas exigible.

`np.e, np.pi`

b) Dans la librairie `numpy.linalg`

Exemple d'importation : `import numpy.linagl as al`

`al.inv, al.rank, al.matrix_power,`
`al.solve, al.eig`

c) Dans la librairie `numpy.random`

Exemple d'importation : `import numpy.random as rd`

`rd.random, rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson, rd.exponential, rd.normal, rd.gamma`	On utilisera ces fonctions pour générer un nombre aléatoire ou bien un vecteur ou une matrice à coefficients aléatoires. Exemple : `rd.binomial(10,0.2)`, `rd.binomial(10,0.2,100)`, `rd.binomial(10,0.2,[100,10])`

d) Dans la librairie `matplotlib.pyplot`

Exemple d'importation : `import matplotlib.pyplot as plt`

`plt.plot, plt.show`	Représentations graphiques de fonctions, de suites. On pourra utiliser les commandes `xlim, ylim, axis, grid, legend` mais elles ne sont pas exigibles.
`plt.hist, plt.bar, plt.boxplot`	Représentations statistiques.
Utilisation de la fonction `rd.random` pour simuler des expériences aléatoires.	On pourra simuler ainsi des lois binomiale et géométrique.
Simulation d'échantillons de lois usuelles.	On pourra utiliser les fonctions `rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson`

e) Dans la librairie `pandas`

Exemple d'importation : `import pandas as pd`

`pd.read_csv, head, shape, pd.describe`	Pour créer une table à partir du fichier de données et en visualiser ou manipuler une partie.
`pd.mean, pd.std, pd.median, pd.count, pd.sort_values.`	Indicateurs statistiques.