



# Annexe 1

## Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **économique et commerciale**

Option : **Economique (ECE)**

Discipline : **Mathématiques-  
Informatique**

**Première année**

# Table des matières

<b>INTRODUCTION</b>	<b>3</b>
<b>1 Objectifs généraux de la formation</b>	<b>3</b>
<b>2 Compétences développées</b>	<b>4</b>
<b>3 Architecture des programmes</b>	<b>4</b>
<b>ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PREMIER SEMESTRE</b>	<b>6</b>
<b>I - Raisonnement et vocabulaire ensembliste</b>	<b>6</b>
1 - Eléments de logique . . . . .	6
2 - Raisonnement par récurrence . . . . .	6
3 - Ensembles, applications . . . . .	7
a) Ensembles, parties d'un ensemble . . . . .	7
b) Applications . . . . .	7
<b>II - Calcul matriciel et résolution de systèmes linéaires</b>	<b>7</b>
1 - Calcul matriciel . . . . .	7
a) Définitions . . . . .	8
b) Opérations matricielles . . . . .	8
2 - Systèmes linéaires . . . . .	8
<b>III - Suites de nombres réels</b>	<b>8</b>
1 - Généralités sur les suites réelles . . . . .	9
2 - Suites usuelles : formes explicites . . . . .	9
3 - Convergence d'une suite réelle . . . . .	9
4 - Comportement asymptotique des suites usuelles . . . . .	9
<b>IV - Fonctions réelles d'une variable réelle</b>	<b>10</b>
1 - Compléments sur les fonctions usuelles . . . . .	10
a) Fonctions polynomiales, polynômes . . . . .	10
b) Fonctions logarithme et exponentielle . . . . .	10
c) Fonction racine carrée, fonction inverse, fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ . . . . .	10
d) Fonction valeur absolue . . . . .	11
e) Fonction partie entière . . . . .	11
2 - Limite et continuité d'une fonction en un point . . . . .	11
3 - Étude globale des fonctions d'une variable sur un intervalle . . . . .	11

<b>V - Probabilités sur un univers fini</b>	<b>12</b>
1 - Événements . . . . .	12
2 - Coefficients binomiaux . . . . .	13
3 - Probabilité . . . . .	13
4 - Probabilité conditionnelle . . . . .	13
5 - Indépendance en probabilité . . . . .	14
<b>ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU SECOND SEMESTRE</b>	<b>14</b>
<b>I - Calcul différentiel et intégral</b>	<b>14</b>
1 - Calcul différentiel . . . . .	14
a) Dérivation . . . . .	14
b) Dérivées successives . . . . .	15
c) Convexité . . . . .	15
2 - Intégration sur un segment . . . . .	16
a) Définition . . . . .	16
b) Propriétés de l'intégrale . . . . .	16
c) Techniques de calcul d'intégrales . . . . .	16
3 - Intégrales sur un intervalle de type $[a, +\infty[$ , $] - \infty, b]$ ou $] - \infty, +\infty[$ . . . . .	17
<b>II - Étude élémentaire des séries</b>	<b>17</b>
1 - Séries numériques à termes réels . . . . .	17
2 - Séries numériques usuelles . . . . .	18
<b>III - Espaces vectoriels et applications linéaires</b>	<b>18</b>
a) Structure vectorielle sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ . . . . .	18
b) Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ . . . . .	18
c) Applications linéaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ . . . . .	19
<b>IV - Probabilités - Variables aléatoires réelles</b>	<b>19</b>
1 - Probabilités - généralisation . . . . .	19
a) Notion de tribu . . . . .	19
b) Probabilité . . . . .	20
c) Indépendance en probabilité . . . . .	20
2 - Généralités sur les variables aléatoires réelles . . . . .	20
3 - Variables aléatoires discrètes . . . . .	21
a) Variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{R}$ . . . . .	21
b) Moments d'une variable aléatoire discrète . . . . .	21
4 - Lois usuelles . . . . .	22
a) Lois discrètes finies . . . . .	22

b) Lois discrètes infinies . . . . .	22
5 - Introduction aux variables aléatoires réelles à densité . . . . .	22
a) Définition des variables aléatoires à densité . . . . .	22
b) Espérance d'une variable aléatoire à densité . . . . .	23
c) Lois à densité usuelles . . . . .	23
<b>ENSEIGNEMENT ANNUEL D'INFORMATIQUE ET ALGORITHMIQUE</b>	<b>24</b>
<b>I - Éléments d'informatique et d'algorithmique</b>	<b>24</b>
1 - L'environnement logiciel . . . . .	24
a) Constantes prédéfinies. Création de variables par affectation. . . . .	24
b) Construction de vecteurs et de matrices numériques . . . . .	24
c) Opérations élémentaires . . . . .	24
d) Fonctions usuelles prédéfinies . . . . .	24
2 - Graphisme en deux dimensions . . . . .	25
3 - Programmation d'algorithmes et de fonctions . . . . .	25
<b>II - Liste des savoir-faire exigibles en première année</b>	<b>25</b>

## INTRODUCTION

### 1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent également certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse, ...).

## 2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates** : savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser** : savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter** : être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter** : savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques** : savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.
- **Communiquer par écrit et oralement** : comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

## 3 Architecture des programmes

Le niveau de référence à l'entrée de la filière EC voie économique est celui de l'enseignement obligatoire de la classe de terminale économique et sociale ou de l'enseignement de spécialité de la classe de terminale littéraire.

Le programme se situe dans le prolongement de ceux des classes de première et terminale de la filière ES ou de spécialité de première et terminale L.

Il est indispensable que chaque enseignant ait une bonne connaissance des programmes du lycée, afin que ses approches pédagogiques ne soient pas en rupture avec l'enseignement qu'auront reçu les étudiants en classes de première et de terminale.

Le programme s'organise autour de quatre points forts qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- L'algèbre linéaire est abordée, en première année, par le biais du calcul : calcul matriciel, systèmes d'équations linéaires. Seule la présentation de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  muni de sa base canonique est exigible. L'espace vectoriel, comme objet général, n'est présenté qu'en seconde année. Ce choix a pour ambition de familiariser les étudiants avec le calcul multidimensionnel tout en les préparant à l'introduction de la notion abstraite d'espace vectoriel.
- L'analyse vise à mettre en place les méthodes courantes de travail sur les suites et les fonctions et permet de développer la rigueur. On s'attache principalement à développer l'aspect opératoire. On n'insiste donc ni sur les questions trop fines ou spécialisées ni sur les exemples «pathologiques». On évite les situations conduisant à une trop grande technicité calculatoire.  
Il est à noter que, dans ce programme, les comparaisons des suites et des fonctions en termes de négligeabilité et d'équivalents ne seront traitées qu'en seconde année. L'étude des séries et des intégrales généralisées par critères de comparaison n'est pas au programme de la première année.

- Les probabilités s’inscrivent dans la continuité de la formation initiée dès la classe de troisième et poursuivie jusqu’en classe de terminale. Le formalisme abstrait (axiomatique de Kolmogorov) donnera de nouveaux outils de modélisation de situations concrètes. On considérera des espaces probabilisés finis au premier semestre, plus généraux au second semestre. En continuité avec les programmes du lycée, le concept de variable aléatoire à densité est présenté dès la première année sur des exemples simples, et permet de justifier une première approche des intégrales généralisées en analyse, qui sera étoffée en seconde année.
- L’informatique est enseignée tout au long de l’année en lien direct avec le programme de mathématiques. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple de la simulation de lois de probabilité, de la recherche de valeurs approchées en analyse ou du traitement de calculs matriciels en algèbre linéaire.

Il est important de mettre en valeur l’interaction entre les différentes parties du programme. Les probabilités permettent en particulier d’utiliser certains résultats d’analyse (suites, séries, intégrales, ...) et d’algèbre linéaire et justifient l’introduction du vocabulaire ensembliste.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d’enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n’est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l’organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.


Dans le contenu du premier semestre, figurent les notions nécessaires et les objets de base qui serviront d’appui à la suite du cours. Ces éléments sont accessibles à tous les étudiants quelles que soient les pratiques antérieures et potentiellement variables de leurs lycées d’origine, et la spécialité qu’ils auront choisie en classe de terminale. Ces contenus vont, d’une part, permettre une approche plus approfondie et rigoureuse de concepts déjà présents mais peu explicités en classe de terminale, et d’autre part, mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d’activités ou d’applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme « admis », la présentation d’une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s’acquiert notamment par l’étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Le symbole  indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l’informatique. L’enseignement informatique est commun à l’ensemble des filières des classes économiques. Le logiciel de référence choisi pour ce programme est Scilab.

# ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PREMIER SEMESTRE

## I - Raisonnement et vocabulaire ensembliste

*Ce chapitre présente des points de vocabulaire, des notations, ainsi que certains types de raisonnement (par l'absurde, par contraposée, par récurrence...) et de démonstrations (d'implications, d'équivalences, d'inclusions...) dont la maîtrise s'avère indispensable à une argumentation rigoureuse sur le plan mathématique.*

*Les sections de ce chapitre ne doivent pas faire l'objet d'un exposé théorique. Les notions seront introduites progressivement au cours du semestre, à l'aide d'exemples variés issus des différents chapitres étudiés, et pourront être renforcées au-delà, en fonction de leur utilité.*

### 1 - Éléments de logique

Les étudiants doivent savoir :

- utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » ;
- utiliser à bon escient les quantificateurs universel et existentiel ; repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- formuler la négation d'une proposition ;
- utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Notations :  $\exists$ ,  $\forall$ .


Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs à des fins d'abréviation est exclu.

### 2 - Raisonnement par récurrence

Apprentissage et emploi du raisonnement par récurrence.

Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.

Notations  $\sum$ ,  $\prod$ .

Illustration par manipulation de sommes et de produits. 

Formules donnant :  $\sum_{k=1}^n k$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2$ .

Les étudiants doivent savoir employer les notations  $\sum_{i=1}^n u_i$  et  $\sum_{\alpha \in A} u_\alpha$  où  $A$  désigne un sous-ensemble fini de  $\mathbf{N}$  ou de  $\mathbf{N}^2$ .

### 3 - Ensembles, applications

*L'objectif de cette section est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications, mais tout exposé théorique est exclu.*

#### a) Ensembles, parties d'un ensemble

Ensemble, élément, appartenance.  
Sous-ensemble (ou partie), inclusion.  
Ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties de  $E$ .  
Réunion. Intersection.  
Complémentaire. Complémentaire d'une union et d'une intersection.  
Produit cartésien.

On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels (« et », « ou », ...).

Le complémentaire d'une partie  $A$  de  $E$  est noté  $\bar{A}$ .

On introduira les notations  $\mathbf{R}^2$  et  $\mathbf{R}^n$ .

#### b) Applications

Définition.  
Composition.  
Injection, surjection, bijection, application réciproque.  
Composée de deux bijections, réciproque de la composée.

Ces notions seront introduites sur des exemples simples, toute manipulation trop complexe étant exclue.

La notion d'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée n'est pas un attendu du programme.

On pourra donner des exemples issus du cours d'analyse.

## II - Calcul matriciel et résolution de systèmes linéaires

*L'objectif de cette partie du programme est :*

– d'une part d'initier au calcul matriciel afin de permettre la résolution de problèmes issus, notamment, des probabilités.

– d'autre part de parvenir à une bonne maîtrise de la résolution des systèmes linéaires et de les interpréter sous forme matricielle.

*L'étude de ce chapitre pourra être menée en lien avec l'informatique.* 

### 1 - Calcul matriciel



## a) Définitions

Définition d'une matrice réelle à  $n$  lignes et  $p$  colonnes. Ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ .

Matrices colonnes, matrices lignes.

Ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Matrices triangulaires, diagonales. Matrice identité.

Transposée d'une matrice. Matrices symétriques.

Notation  ${}^tA$ . On caractérisera les matrices symétriques à l'aide de la transposée.

## b) Opérations matricielles

Somme, produit par un nombre réel, produit.

Propriétés des opérations.

Transposée d'une somme, d'un produit de matrices carrées.

Opérations sur les matrices carrées ; puissances.

On pourra faire le lien entre le produit  $AB$  et le produit de  $A$  avec les colonnes de  $B$ .  $\blacktriangleright$

Exemples de calcul des puissances  $n$ -èmes d'une matrice carrée ; application à l'étude de suites réelles satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants.  $\blacktriangleright$

La formule du binôme n'est pas un attendu du programme du premier semestre.

On admettra que pour une matrice carrée, un inverse gauche ou droit est l'inverse.

Matrices inversibles.

Inverse d'un produit.

## 2 - Systèmes linéaires

*Tout développement théorique est hors programme.*

Définition d'un système linéaire.

Système homogène, système de Cramer.

Résolution par la méthode du pivot de Gauss.

La méthode sera présentée à l'aide d'exemples. On codera les opérations élémentaires sur les lignes de la façon suivante :

$$L_i \leftarrow L_i + bL_j \ (i \neq j), \ L_i \leftarrow aL_i \ (a \neq 0),$$

$$L_i \leftrightarrow L_j, \ L_i \leftarrow aL_i + bL_j \ (i \neq j, \ a \neq 0). \ \blacktriangleright$$

Écriture matricielle  $AX = Y$  d'un système linéaire.

La résolution directe sans application systématique de la méthode du Pivot peut être avantageuse lorsque certaines équations ont des coefficients nuls.

Calcul de l'inverse de la matrice  $A$  par la résolution du système  $AX = Y$ .

Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2.

Caractérisation de l'inversibilité des matrices triangulaires.

## III - Suites de nombres réels

*L'étude des suites numériques au premier semestre permet aux étudiants de se familiariser avec la notion de suite réelle et de convergence. Tout exposé trop théorique sur ces notions est à exclure.*

*Cette première approche des suites élargit la conception de la notion de fonction.*

*L'étude des suites classiques pourra se faire en lien étroit avec la partie probabilités pour mettre en avant l'utilité de cet outil numérique.*

*La notion de convergence d'une suite réelle pourra être introduite en lien avec l'informatique. *

## 1 - Généralités sur les suites réelles

Définitions, notations.

Exemples de définitions : par formules récurrentes ou explicites, par restriction d'une fonction de variable réelle aux entiers.

## 2 - Suites usuelles : formes explicites

Suite arithmétique, suite géométrique.

Formule donnant  $\sum_{k=0}^n q^k$ .

Calculs de sommes portant sur les suites arithmétiques et géométriques.

Suite arithmético-géométrique.

Les étudiants devront se ramener au cas d'une suite géométrique.

Suite vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.

On se limitera au cas des racines réelles. 

## 3 - Convergence d'une suite réelle

*Aucune démonstration concernant les résultats de cette section n'est exigible.*

Limite d'une suite, suites convergentes.

$(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\ell$ , élément de  $\mathbf{R}$ , si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$ , contient les termes  $u_n$  pour tous les indices  $n$ , hormis un nombre fini d'entre eux.

Généralisation aux limites infinies.

Unicité de la limite.

Opérations algébriques sur les suites convergentes. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

Aucune technicité sur ces opérations ne sera exigée.

Existence d'une limite par encadrement.

Suites monotones. Suites adjacentes.

Théorème de la limite monotone.

Toute suite croissante (respectivement décroissante) et majorée (respectivement minorée) converge.

Toute suite croissante (respectivement décroissante) non majorée (respectivement non minorée) tend vers  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ).

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

## 4 - Comportement asymptotique des suites usuelles

Croissances comparées.

Comparaison des suites  $(n^a)$ ,  $(q^n)$ ,  $((\ln(n))^b)$ .

#### IV - Fonctions réelles d'une variable réelle

*Il s'agit, dans ce chapitre, de fournir aux étudiants un ensemble de connaissances de référence sur les fonctions usuelles et quelques théorèmes sur les fonctions d'une variable réelle. Ils pourront mémoriser ces résultats grâce aux représentations graphiques qui en constituent une synthèse. Le champ des fonctions étudiées se limite aux fonctions usuelles et à celles qui s'en déduisent de façon simple. On se restreindra aux fonctions définies sur un intervalle de  $\mathbf{R}$ . Les fonctions trigonométriques sont hors programme.*

*L'étude des fonctions usuelles donnera aux étudiants l'occasion de mobiliser leurs connaissances de terminale concernant les fonctions d'une variable réelle.*

*L'analyse reposant largement sur la pratique des inégalités, on s'assurera que celle-ci est acquise à l'occasion d'exercices.*

*Aucune démonstration concernant les résultats de ce chapitre n'est exigible.*

#### 1 - Compléments sur les fonctions usuelles

##### a) Fonctions polynomiales, polynômes

Degré, somme et produit de polynômes.

Par convention,  $\deg 0 = -\infty$ .

La construction des polynômes formels n'est pas au programme, on pourra identifier polynômes et fonctions polynomiales.

Ensemble  $\mathbf{R}[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbf{R}$ , ensembles  $\mathbf{R}_n[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbf{R}$  de degré au plus  $n$ .

Racines d'un polynôme. Factorisation par  $(X - a)$  dans un polynôme ayant  $a$  comme racine.

Application : un polynôme de  $\mathbf{R}_n[X]$  admettant plus de  $n + 1$  racines distinctes est nul.

Pratique, sur des exemples, de la division euclidienne. 

Trinômes du second degré.

Discriminant d'un trinôme du second degré. Factorisation dans le cas de racines réelles. Lorsqu'il n'y a pas de racine réelle, le signe du trinôme reste constant sur  $\mathbf{R}$ .

##### b) Fonctions logarithme et exponentielle

Rappel des propriétés. Positions relatives des courbes représentatives de  $\ln$ ,  $\exp$ ,  $x \mapsto x$ .

Études asymptotiques, croissances comparées.

##### c) Fonction racine carrée, fonction inverse, fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$

Définitions ; notations, propriétés, représentations graphiques.

On fera une étude détaillée des fonctions puissances. Les étudiants doivent connaître les règles de calcul sur les puissances.

Par le biais d'exercices, étude de fonctions du type  $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ .

#### d) Fonction valeur absolue

Définition. Propriétés, représentation graphique.

Lien avec la distance sur  $\mathbf{R}$ .

On insistera sur la fonction valeur absolue, non étudiée au lycée.

#### e) Fonction partie entière

Définition. Représentation graphique.

Notation  $x \mapsto [x]$ .

La notation  $E$  est réservée à l'espérance mathématique. La fonction partie entière permet de discrétiser des phénomènes continus.

### 2 - Limite et continuité d'une fonction en un point

Définition de la limite d'une fonction en un point et de la continuité d'une fonction en un point.

Unicité de la limite.

Limite à gauche, limite à droite. Extension au cas où la fonction est définie sur  $I \setminus \{x_0\}$ .

Extension de la notion de limite en  $\pm\infty$  et aux cas des limites infinies.

On adoptera la définition suivante :  $f$  étant une fonction définie sur un intervalle  $I$ ,  $x_0$  étant un réel élément de  $I$  ou une extrémité de  $I$ , et  $\ell$  un élément de  $\mathbf{R}$ , on dit que  $f$  admet  $\ell$  pour limite en  $x_0$  si, pour tout nombre  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre  $\alpha > 0$  tel que pour tout élément  $x$  de  $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ ,  $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$  ; par suite, lorsque  $x_0$  appartient à  $I$ , cela signifie que  $f$  est continue au point  $x_0$  et, dans le cas contraire, que  $f$  se prolonge en une fonction continue au point  $x_0$ .

Opérations algébriques sur les limites.

Compatibilité du passage à la limite avec les relations d'ordre.

Existence d'une limite par encadrement.

Limite d'une fonction composée.

Si  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$  admettant une limite  $\ell$  en un point  $x_0$ , et si  $(u_n)$  est une suite d'éléments de  $I$  convergeant vers  $x_0$ , alors la suite  $(f(u_n))$  converge vers  $\ell$ .

Comparaison des fonctions exponentielle, puissance et logarithme au voisinage de  $+\infty$  et des fonctions puissance et logarithme au voisinage de 0.

Les notions d'équivalence et de négligeabilité ne seront abordées qu'en deuxième année.

### 3 - Étude globale des fonctions d'une variable sur un intervalle

Fonctions paires, impaires.  
Fonctions majorées, minorées, bornées.  
Fonctions monotones.  
Théorème de la limite monotone.

Toute fonction monotone sur  $]a, b[$  ( $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ) admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de  $]a, b[$ .  
Comportement en  $a$  et  $b$ .

Fonctions continues sur un intervalle. Opérations algébriques, composition.  
Fonctions continues par morceaux.

Une fonction  $f$  est continue par morceaux sur le segment  $[a, b]$  s'il existe une subdivision  $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$  telle que les restrictions de  $f$  à chaque intervalle ouvert  $]a_i, a_{i+1}[$  admettent un prolongement continu à l'intervalle fermé  $[a_i, a_{i+1}]$ .

Théorème des valeurs intermédiaires.  
L'image d'un intervalle (respectivement un segment) par une fonction continue est un intervalle (respectivement un segment).

Résultat admis.  
Notations :  $\max_{t \in [a, b]} f(t)$  et  $\min_{t \in [a, b]} f(t)$ .

On illustrera ces résultats par des représentations graphiques et on montrera comment les mettre en évidence sur un tableau de variations.

Théorème de la bijection.

Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  définit une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $f(I)$ .

Continuité et sens de variation de la fonction réciproque.  
Représentation graphique de la fonction réciproque.

On utilisera ces résultats pour l'étude des équations du type  $f(x) = k$ .

En liaison avec l'algorithmique, méthode de dichotomie. 

Application à l'étude de suites  $(u_n)$  telles que  $v_n = f(u_n)$ .

## V - Probabilités sur un univers fini

*L'objectif de ce chapitre est de mettre en place, dans le cas fini, un cadre dans lequel on puisse énoncer des résultats généraux et mener des calculs de probabilités sans difficulté théorique.*

*On fera le lien avec les arbres pondérés, préconisés durant le cycle terminal du lycée. Ils seront remplacés par des raisonnements dont l'emploi, plus souple, pourra être généralisé, par la suite, aux univers infinis.*

*Les coefficients binomiaux doivent être repris en conformité avec l'approche du cycle terminal du lycée. Dans tout ce chapitre,  $\Omega$  est un ensemble fini (on généralisera les notions rencontrées au second semestre).*

### 1 - Événements

Expérience aléatoire.  
Univers des résultats observables.

Événements, événements élémentaires, opérations sur les événements, événements incompatibles.

Système complet d'événements fini.

On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples où l'ensemble  $\Omega$  des résultats possibles est fini, et où  $\mathcal{P}(\Omega)$  est l'ensemble des événements.

On fera le lien entre connecteurs logiques et opérations sur les événements.

On se limitera aux systèmes complets d'événements de type  $A_1, \dots, A_n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), où les  $A_i$  sont des parties deux à deux disjointes et de réunion égale à  $\Omega$ .

## 2 - Coefficients binomiaux

Factorielle, notation  $n!$ .

Parties à  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments.

Coefficients binomiaux, notation  $\binom{n}{p}$ .

Relation  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ .

Formule du triangle de Pascal.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Interprétation de  $n!$  en tant que nombre de permutations d'un ensemble à  $n$  éléments.  $\blacktriangleright$

On fera le lien entre les parties à  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments et le nombre de chemins d'un arbre réalisant  $p$  succès pour  $n$  répétitions.

La formule de Pascal fournit un algorithme de calcul efficace pour le calcul numérique des coefficients binomiaux.  $\blacktriangleright$

On pourra démontrer cette formule par récurrence à partir de la formule du triangle de Pascal.

## 3 - Probabilité

Définition d'une probabilité sur  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

On restreindra, pour ce premier semestre, la notion de probabilité à une application  $P$  de  $\mathcal{P}(\Omega)$  dans  $[0, 1]$  vérifiant :

- pour tous  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{P}(\Omega)$  tels que  $A \cap B = \emptyset$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\Omega) = 1$ .

Cas de l'équiprobabilité.

Formule de Poincaré ou du crible dans le cas  $n \leq 3$ .

## 4 - Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle.

Notation  $P_A$ .

Formule des probabilités composées.

- Si  $P(A) \neq 0$ ,  $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ .
- Si  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ ,  
$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Formule des probabilités totales.

Formule de Bayes.

Si  $(A_i)_{i \in I}$  est un système complet d'événements fini, alors pour tout événement  $B$  :  $P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i)$ .

On donnera de nombreux exemples d'utilisation de ces formules. En particulier on pourra appliquer la formule des probabilités totales à l'étude de chaînes de Markov simples.

## 5 - Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements.

Si  $P(A) \neq 0$ ,  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $P_A(B) = P(B)$ .

Indépendance mutuelle de  $n$  événements ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

Si  $n$  événements  $A_i$  sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements  $B_i$ , avec  $B_i = A_i$  ou  $\overline{A_i}$ .

# ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU SECOND SEMESTRE

## I - Calcul différentiel et intégral

*Le but de ce chapitre est de mettre en place les méthodes courantes de travail sur les fonctions.*

*Les intégrales généralisées sont introduites en tant qu'outil pour la définition et l'étude des variables aléatoires à densité. Toute technicité sur les intégrales généralisées est à exclure.*

*Aucune démonstration concernant les résultats de ce chapitre n'est exigible.*

### 1 - Calcul différentiel

#### a) Dérivation

Dérivée en un point, développement limité à l'ordre 1 au voisinage d'un point.

Tangente au graphe en un point.

Dérivée à gauche, à droite.

Fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée.

Notation  $f'$ .

Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions puissances.  
Dérivée des fonctions composées.  
Dérivation des fonctions réciproques.  
Inégalités des accroissements finis.

On évitera tout excès de technicité dans les calculs de dérivées.

(1) Si  $m \leq f' \leq M$  sur un intervalle  $I$ , alors :  
 $\forall (a, b) \in I^2, a \leq b,$

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

(2) Si  $|f'| \leq k$  sur un intervalle  $I$ , alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$

Application, sur des exemples, à l'étude de suites récurrentes du type :  $u_{n+1} = f(u_n)$  lorsque

$$|f'| \leq k < 1. \quad \blacktriangleright$$

Tout exposé théorique sur les suites récurrentes générales est exclu.

Caractérisation des fonctions constantes et monotones par le signe de la dérivée.

Résultat admis.

Si  $f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et si  $f' \geq 0$  sur  $I$ ,  $f'$  ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

Extremum local d'une fonction dérivable.

Une fonction  $f$ , dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ , admet un extremum local en un point de  $I$  si sa dérivée s'annule en changeant de signe en ce point.

## b) Dérivées successives

Fonctions  $p$  fois dérivables.  
Fonctions de classe  $C^p$ , de classe  $C^\infty$ .  
Opérations algébriques.

Notation  $f^{(p)}$ .

## c) Convexité

Tous les résultats de cette section seront admis.

Définition d'une fonction convexe.

Une fonction est convexe sur un intervalle  $I$  si :  $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2$  tels que  $t_1 + t_2 = 1$ ,  
 $f(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2)$ .

Interprétation géométrique.  $\blacktriangleright$

Fonctions concaves.  
Points d'inflexion.  
Caractérisation des fonctions convexes de classe  $C^1$ .

Si  $f$  est de classe  $C^1$ ,  $f$  est convexe si et seulement si l'une de ces deux propositions est vérifiée :

- $f'$  est croissante ;
- $C_f$  est au-dessus de ses tangentes.



Caractérisation des fonctions convexes et concaves de classe  $C^2$ .

## 2 - Intégration sur un segment

### a) Définition

Aire sous la courbe d'une fonction positive.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.

Toute fonction continue sur un intervalle admet, sur cet intervalle, au moins une primitive.

Intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Relation de Chasles.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

### b) Propriétés de l'intégrale

Linéarité et positivité de l'intégrale.

L'intégrale d'une fonction positive sur un segment est positive.

L'intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment est nulle si et seulement si la fonction est identiquement nulle sur le segment.

Si  $a \leq b$ ,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \leq (b-a) \max_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

### c) Techniques de calcul d'intégrales

*On évitera tout excès de technicité pour les calculs d'intégrales par changement de variable.*

Calcul de primitives « à vue », déduites de la reconnaissance de schémas inverses de dérivation.

Dans le cas où  $f$  est continue monotone, on constatera que cette fonction « aire sous la courbe » admet  $f$  pour dérivée.

Admis.

Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$ , pour tout  $(a, b) \in I^2$ , on définit l'intégrale de  $f$  de  $a$  à  $b$  par :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a),$$

où  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ . Cette définition est indépendante du choix de la primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$ .

On apprendra aux étudiants à majorer et à minorer des intégrales, par utilisation de ces inégalités ou par intégration d'inégalités.

On insistera sur le modèle  $u'(x)u(x)^\alpha$  ( $\alpha \neq -1$  ou  $\alpha = -1$ ).

Intégration par parties. Changement de variables.

Les changements de variables autres qu'affines seront précisés dans les exercices.

On pourra à titre d'exemples étudier des suites définies par une intégrale et des fonctions définies par une intégrale.

Sommes de Riemann à pas constant.

Sur des exemples, on pourra mettre en œuvre la méthode des rectangles pour le calcul approché d'une intégrale. ►

### 3 - Intégrales sur un intervalle de type $[a, +\infty[$ , $] - \infty, b]$ ou $] - \infty, +\infty[$

Convergence des intégrales  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$   
où  $f$  est continue sur  $[a, +\infty[$ .

$\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$  existe et est finie.

Linéarité, positivité, relation de Chasles.

Les techniques de calcul (intégration par parties, changement de variables non affine) ne seront pratiquées qu'avec des intégrales sur un segment.

L'étude de la convergence des intégrales de fonctions positives par des critères de comparaison sera faite en seconde année. On pourra éventuellement aborder, sur des exemples, le cas  $0 \leq f \leq g$ .

Convergence des intégrales de Riemann  
 $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  et de  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ .

Convergence absolue.

En première année, cette notion est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité.

La convergence absolue implique la convergence.

Résultat admis.

Extension des notions précédentes aux intégrales  $\int_{-\infty}^b f(t) dt$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ .

## II - Étude élémentaire des séries

*Ce chapitre fait suite au chapitre sur les suites numériques réelles du premier semestre, une série étant introduite comme une suite de sommes partielles. Aucune technicité n'est exigible en première année. L'étude des variables aléatoires discrètes sera l'occasion d'une mise en œuvre naturelle de ces premières connaissances sur les séries. L'étude des séries sera complétée en seconde année par les techniques de comparaison sur les séries à termes positifs.*

### 1 - Séries numériques à termes réels

Série de terme général  $u_n$ .  
Sommes partielles associées.

Définition de la convergence.  
Combinaison linéaire de séries convergentes.

Convergence absolue.

La convergence absolue implique la convergence.

On soulignera l'intérêt de la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  pour l'étude de la suite  $(u_n)$ .

$\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge si  $\sum_{k=n_0}^n u_k$  admet une limite finie lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

On pratiquera, sur des exemples simples, l'étude des séries (convergence, calcul exact ou approché de la somme).  $\blacktriangle$

En première année, cette notion est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

Résultat admis.

## 2 - Séries numériques usuelles

Étude des séries  $\sum q^n, \sum nq^{n-1}, \sum n(n-1)q^{n-2}$  et calcul de leurs sommes.

Convergence et somme de la série exponentielle  $\sum \frac{x^n}{n!}$ .

Résultats admis.

## III - Espaces vectoriels et applications linéaires

*Ce chapitre ne doit pas donner lieu à un exposé théorique ; on donne ici une première approche concrète à des notions qui seront généralisées en seconde année. Pour simplifier ce premier contact, l'étude se limitera à l'espace  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ , en privilégiant les exemples pour  $n \in \{2, 3, 4\}$ .*

### a) Structure vectorielle sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$

Structure vectorielle sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ .  
Combinaisons linéaires.

Base canonique.

On privilégiera le travail sur les espaces  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}), \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}), \mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ .

Les bases canoniques des espaces vectoriels ci-dessus seront données de façon naturelle.

### b) Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$

Sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ .

Sous-espace vectoriel engendré, notation  $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ .

Base d'un sous-espace vectoriel.

Exemple fondamental : ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à 2, 3, 4 inconnues.

$(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une base du sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  si et seulement si tout vecteur de  $F$  se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire de  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ .

### c) Applications linéaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$

Propriétés des applications  $f$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  dans  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$  définies par  $X \mapsto MX$ ,  $M$  étant une matrice à  $p$  lignes et  $n$  colonnes.

Toute application linéaire  $f$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  dans  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$  est de la forme  $f : X \mapsto MX$ .

Noyau d'une application linéaire.

Image d'une application linéaire.

Exemples pratiques dans le cas où  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  et  $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Le noyau est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ .

Lien entre recherche du noyau et résolution d'un système homogène.

L'image est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ .

$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$  où  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ .

Lien entre recherche de l'image et résolution de système.  $\blacktriangleright$

## IV - Probabilités - Variables aléatoires réelles

Dans ce chapitre, on généralise l'étude faite au premier semestre; les notions de tribu et d'espace probabilisé sont introduites. Tout exposé trop théorique sur ces notions est cependant exclu.

L'étude des variables aléatoires et notamment celles des lois usuelles se fera en lien étroit avec la partie informatique du programme.  $\blacktriangleright$

L'étude des variables aléatoires discrètes se fera dans la mesure du possible en tant qu'outil de modélisation de problèmes concrets.

On sensibilisera les étudiants à la notion d'approximation de loi, dans la continuité du programme de terminale, en utilisant notamment l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson sur des exemples judicieux.

### 1 - Probabilités - généralisation

#### a) Notion de tribu

Tribu ou  $\sigma$ -algèbre d'événements.

Notation  $\mathcal{A}$ .

On donnera quelques exemples significatifs d'événements de la forme :

$$A = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \quad \text{et} \quad A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

On généralisera dans ce paragraphe l'étude effectuée lors du premier semestre.

Aucun raisonnement théorique autour de la notion de tribu n'est exigible des étudiants.

Généralisation de la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à  $\Omega$ .

## b) Probabilité

Une probabilité  $P$  est une application définie sur  $\mathcal{A}$  et à valeurs dans  $[0, 1]$ ,  $\sigma$ -additive et telle que  $P(\Omega) = 1$ .

Notion d'espace probabilisé.

Propriétés vraies presque sûrement.

Théorème de la limite monotone.

Conséquences du théorème de la limite monotone.

Généralisation de la notion de probabilité conditionnelle.

Généralisation de la formule des probabilités composées.

Généralisation de la formule des probabilités totales.

## c) Indépendance en probabilité

Indépendance mutuelle d'une suite infinie d'événements.

## 2 - Généralités sur les variables aléatoires réelles

On généralisera ici la notion de probabilité étudiée au premier semestre.

Notation  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

- Pour toute suite croissante  $(A_n)$  d'événements,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

- Pour toute suite décroissante  $(A_n)$  d'événements,

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

- $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$ .
- $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$ .

Les démonstrations de ces formules ne sont pas exigibles.

Définition d'une variable aléatoire réelle.

Système complet d'événements associé à une variable aléatoire.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire. Propriétés.

Loi d'une variable aléatoire.

### 3 - Variables aléatoires discrètes

#### a) Variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{R}$

Définition d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbf{R}$ .

Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire discrète par la donnée des valeurs  $P(X = x)$  pour  $x \in X(\Omega)$ .

Variable aléatoire  $Y = g(X)$ , où  $g$  est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire  $X$ . Étude de la loi de  $Y = g(X)$ .

#### b) Moments d'une variable aléatoire discrète

Définition de l'espérance.

Linéarité de l'espérance. Positivité.

Variations centrées.

Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire  $Y = g(X)$ , où  $g$  est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire  $X$ .

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

$X$  est une variable aléatoire réelle définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  si  $X$  est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbf{R}$  telle que pour tout élément  $x$  de  $\mathbf{R}$ ,  $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$ .

Démontrer que  $X$  est une variable aléatoire ne fait pas partie des exigibles du programme.

Notations  $[X \in I]$ ,  $[X = x]$ ,  $[X \leq x]$ , etc.

$$\forall x \in \mathbf{R}, F_X(x) = P(X \leq x).$$

$F_X$  est croissante, continue à droite en tout point,  $\lim_{-\infty} F_X = 0$ ,  $\lim_{+\infty} F_X = 1$ . Résultats admis.

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire. Résultat admis.

L'ensemble des valeurs prises par ces variables aléatoires sera indexé par une partie finie ou infinie de  $\mathbf{N}$  ou  $\mathbf{Z}$ .

On insistera, dans le cas où  $X$  est à valeurs dans  $\mathbf{Z}$ , sur la relation  $P(X = k) = F_X(k) - F_X(k - 1)$ .

On se limite à des cas simples, tels que  $g : x \mapsto ax + b$ ,  $g : x \mapsto x^2, \dots$

Quand  $X(\Omega)$  est infini, une variable aléatoire  $X$  admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$
 est absolument convergente.

Notation  $E(X)$ .

Résultats admis.

Quand  $X(\Omega)$  est infini,  $E(g(X))$  existe si et seulement si la série  $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$

converge absolument, et dans ce cas  $E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ . Théorème admis.

Moment d'ordre  $r$  ( $r \in \mathbf{N}$ ).

Variance, écart-type d'une variable aléatoire discrète.

Formule de Kœnig-Huygens.

$$V(aX + b) = a^2V(X).$$

Cas où  $V(X) = 0$ .

Variables centrées réduites.

Notation  $m_r(X) = E(X^r)$ .

Notations  $V(X)$ ,  $\sigma(X)$ .

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

On notera  $X^*$  la variable aléatoire centrée réduite associée à  $X$ .

## 4 - Lois usuelles

### a) Lois discrètes finies

Loi certaine.

Loi de Bernoulli. Espérance, variance.

Loi binomiale. Espérance, variance.

Application : formule du binôme de Newton donnant  $(a + b)^n$ .

Loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Espérance, variance.

Caractérisation par la variance.

Notation  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ .

Notation  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .  $\blacktriangleright$

Lorsque  $a$  et  $b$  sont strictement positifs, lien avec  $\mathcal{B}(n, \frac{a}{a+b})$ . La formule du binôme de Newton dans le cas général pourra être démontrée par récurrence.

Application à l'étude de la loi uniforme sur  $\llbracket a, b \rrbracket$ , où  $(a, b) \in \mathbf{N}^2$ .

Notation  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ .  $\blacktriangleright$

### b) Lois discrètes infinies

Loi géométrique (rang d'apparition du premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire).

Espérance, variance.

Loi de Poisson.

Espérance, variance.

Notation  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ .  $\blacktriangleright$

Si  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ ,  $\forall k \in \mathbf{N}^*$ ,  $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ .

Notation  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ .

On pourra introduire la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$  comme loi « limite » (cette notion sera précisée en deuxième année) d'une suite de variables suivant la loi binomiale  $B(n, \frac{\lambda}{n})$ .  $\blacktriangleright$

## 5 - Introduction aux variables aléatoires réelles à densité

On se limitera dans ce chapitre à des densités ayant des limites finies à gauche et à droite, en tout point de  $\mathbf{R}$ .

### a) Définition des variables aléatoires à densité

Définition d'une variable aléatoire à densité.

Toute fonction  $f_X$  à valeurs positives, qui ne diffère de  $F'_X$  qu'en un nombre fini de points, est une densité de  $X$ .

Caractérisation de la loi d'une variable à densité par la donnée d'une densité  $f_X$ .

Toute fonction  $f$  positive, continue sur  $\mathbf{R}$  éventuellement privé d'un nombre fini de points et telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$  est la densité d'une variable aléatoire.

Transformation affine d'une variable à densité.

## b) Espérance d'une variable aléatoire à densité

Espérance.

Variables centrées.

## c) Lois à densité usuelles

Loi uniforme sur un intervalle. Espérance.

Loi exponentielle. Caractérisation par l'absence de mémoire. Espérance.

Loi normale centrée réduite.

Loi normale (ou de Laplace-Gauss).

Espérance.

On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  est à densité si sa fonction de répartition  $F_X$  est continue sur  $\mathbf{R}$  et de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{R}$  éventuellement privé d'un ensemble fini de points.


Pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}$ ,  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ .


Résultat admis.


Les étudiants devront savoir calculer la fonction de répartition et une densité de  $aX + b$  ( $a \neq 0$ ).

Une variable aléatoire  $X$  de densité  $f_X$  admet une espérance  $E(X)$  si et seulement si l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$  est absolument convergente; dans ce cas,  $E(X)$  est égale à cette intégrale.

Exemples de variables aléatoires n'admettant pas d'espérance.

Notation  $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a, b]$ . 

Notation  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ . 

Notation  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ . 

On pourra démontrer en exercice que  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  converge.

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ .

On attend des étudiants qu'ils sachent représenter graphiquement les fonctions densités des lois normales et utiliser la fonction de répartition  $\Phi$  de la loi normale centrée réduite.





Fonction `rand`

Fonctions matricielles : `rank(A)`, `inv(A)`, `A'`

La fonction `grand` pourra être utilisée avec les paramètres correspondant aux lois de probabilité présentes dans le programme.

Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne d'une matrice.

On pourra utiliser les fonctions `size(A)`, `find` dans le cadre de simulations.

Pratique des opérations et des fonctions matricielles dans des situations concrètes.

## 2 - Graphisme en deux dimensions

Courbes représentatives de fonctions usuelles, de densités et de fonctions de répartition.

Tracé d'histogrammes.

On pourra utiliser les fonctions `plot`, `plot2d`, `bar`, `histplot`, la fonction `linspace(a,b,n)` et les opérations `.*`, `./`, `.^`

## 3 - Programmation d'algorithmes et de fonctions

Les structures suivantes seront utilisées :

Structure conditionnelle :

```
if ...then ...end
if ...then ...else ...end
```

Structures répétitives :

```
for k=...: ...end
while ...then ...end
```

Fonctions - arguments - retour de résultats.

Fonction d'entrée des données `input()`

Fonction de sortie de résultat(s) `disp()`

Exemples :  $n!$ ,  $\binom{n}{p}$ .

Saisie au clavier - message indicatif possible.

Affichage du contenu d'une variable à l'écran avec commentaire éventuel.

## II - Liste des savoir-faire exigibles en première année

Calcul des termes d'une suite.

Calculs de valeurs approchées de la limite d'une suite ou de la somme d'une série.

Calcul approché de la racine d'une équation du type  $f(x) = 0$ .

Calcul des valeurs approchées d'une intégrale par la méthode des rectangles.

Utilisation de la fonction `rand` pour simuler des expériences aléatoires élémentaires conduisant à une loi usuelle.

Exploitation graphique des résultats.

On utilisera des structures répétitives et conditionnelles en exploitant l'étude mathématique. La détermination du rang d'arrêt du calcul résultera directement de l'étude mathématique ou d'un algorithme qui en découle.

On utilisera différentes méthodes dont certaines résulteront d'une étude mathématique (suites récurrentes, encadrements, dichotomie).

Application au calcul de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Loi binomiale, loi géométrique.

Simulation de phénomènes aléatoires.

Utilisation de la fonction `grand`

On pourra utiliser une simulation pour comparer expérimentalement une loi  $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$  ( $n$  grand) avec la loi de Poisson.

On pourra utiliser une simulation pour comparer expérimentalement une loi binomiale avec une loi normale.

Résolution de systèmes  $AX = B$ .