Annexe 1
Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **économique et commerciale**

Option : **Scientifique (ECS)**

Discipline : **Mathématiques-Informatique**

Première année

Table des matières

Introduction

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, ...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse, ...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.
- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le niveau de référence à l'entrée de la filière EC voie scientifique est celui de l'enseignement obligatoire de la classe de terminale scientifique. Le programme se situe dans le prolongement de ceux des classes de première et terminale de la filière S.

Il est indispensable que chaque enseignant ait une bonne connaissance des programmes du lycée, afin que ses approches pédagogiques ne soient pas en rupture avec l'enseignement qu'auront reçu les étudiants en classes de première et de terminale.

Le programme s'organise autour de quatre points forts qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- L'algèbre linéaire est abordée d'abord par le calcul matriciel, outil indispensable pour le calcul multidimensionnel, puis par les espaces vectoriels. La pratique de l'algèbre linéaire permet de développer chez l'étudiant des capacités d'abstraction, mais aussi de renforcer sa démarche logique indispensable en mathématiques.

- L'analyse vise à mettre en place les méthodes courantes de travail sur les suites et les fonctions et permet de développer la rigueur. On s'attache principalement à développer l'aspect opératoire. On n'insiste donc ni sur les questions trop fines ou spécialisées ni sur les exemples « pathologiques ». On évite les situations conduisant à une trop grande technicité calculatoire.

- Les probabilités s'inscrivent dans la continuité de la formation initiée dès la classe de troisième et poursuivie jusqu'en classe de terminale. Le formalisme abstrait (axiomatique de Kolmogorov) donnera de nouveaux outils de modélisation de situations concrètes.

- L'informatique est enseignée tout au long de l'année en lien direct avec le programme de mathématiques. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple de la simulation de lois de probabilité, de la recherche de valeurs approchées en analyse ou d'outils de calculs en algèbre linéaire.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. Les probabilités permettent en particulier d'utiliser certains résultats d'analyse (suites, séries, intégrales...) et d'algèbre linéaire et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Dans le contenu du premier semestre, figurent les notions nécessaires et les objets de base qui serviront d'appui à la suite du cours. Ces éléments sont accessibles à tous les étudiants quelles que soient les pratiques antérieures et potentiellement variables de leurs lycées d'origine, et la spécialité qu'ils auront choisie en classe de terminale. Ces contenus vont, d'une part, permettre une approche plus approfondie et rigoureuse de concepts déjà présents mais peu explicités au lycée, et d'autre part, mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus.

En continuité avec les programmes du lycée, le concept de variable aléatoire à densité est présenté dès la première année sur des exemples simples, et permet de justifier l'introduction des intégrales généralisées en analyse, de même que l'étude des variables discrètes pour l'introduction aux séries.

L'algèbre linéaire est abordée, au premier semestre, par le biais du calcul : calcul matriciel, systèmes d'équations linéaires. Des rudiments de vocabulaire général sur les espaces vectoriels sont introduits lors du premier semestre. Ce choix a pour ambition de familiariser les étudiants avec le calcul multidimensionnel afin de les préparer à l'introduction de la notion abstraite d'espace vectoriel, qui sera étudiée essentiellement au second semestre.

En analyse, le premier semestre permet de consolider et approfondir des notions familières aux étudiants, comme les suites, les intégrales et les dérivées. Le second semestre généralise les notions du premier semestre en introduisant les séries et les intégrales généralisées, dans l'objectif de l'étude des probabilités.

Pour les probabilités, on se place sur les espaces probabilisés finis au premier semestre, plus généraux au second semestre, les variables aléatoires à densité étant abordées au second semestre.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus, des applications ou des exemples d'activités.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de formation de ces classes préparatoires.

La plupart des résultats mentionnés dans le programme seront démontrés. Pour certains marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main par les étudiants des techniques usuelles et bien délimitées inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l'informatique. L'enseignement informatique est commun à l'ensemble des filières des classes économiques. Le logiciel de référence choisi pour ce programme est Scilab.

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{K}$ désigne exclusivement $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Enseignement de mathématiques du premier semestre

I - Raisonnement et vocabulaire ensembliste

1 - Éléments de logique

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire des raisonnements mathématiques, mais tout exposé théorique est exclu. Les notions de ce paragraphe pourront être présentées en contexte au cours du semestre, évitant ainsi une présentation trop formelle.

Connecteurs : et, ou, non, implication, réciproque, contraposée. Quantificateurs : $\forall$, $\exists$.	On présentera des exemples de phrases mathématiques utilisant les connecteurs et les quantificateurs, et on expliquera comment écrire leurs négations.

2 - Raisonnement par récurrence et calcul de sommes et de produits

Emploi du raisonnement par récurrence.	Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.
Formules donnant : $\sum_{k=0}^{n} q^k$, $\sum_{k=1}^{n} k$.	Exemple : formules donnant $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$.
Notations $\sum$, $\prod$. Définition de $n!$.	Les étudiants doivent savoir employer les notations $\sum_{i=1}^{n} u_i$ et $\sum_{i \in A} u_i$ où A désigne un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{N}^2$. $\boxed{\blacktriangleright}$

3 - Ensembles, applications

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications, en vue de préparer l'étude des chapitres d'algèbre linéaire et de probabilité, mais tout exposé théorique est exclu.

a) Ensembles, parties d'un ensemble

Appartenance. Inclusion. Notations $\in$, $\subset$.	
Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.	On pourra donner l'exemple de $\mathcal{P}(\{1,\ldots,6\})$ afin de faciliter l'introduction de la notion de tribu.
Complémentaire. Notation $\overline{A}$.	La notation $\overline{A}$ est à privilégier. En cas d'ambiguïté, on utilisera la notation $\complement_E^A$.
Union, intersection. Notations $\bigcap$, $\bigcup$. Distributivité. Lois de Morgan.	On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels.
Définition du produit cartésien d'ensembles.	On introduira les notations $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$.

b) Applications

Définition. Composée de deux applications.	
Restriction et prolongement d'une application.	Ces deux notions ne seront introduites que dans les cours d'algèbre linéaire et d'analyse.
Applications injectives, surjectives, bijectives.	On pourra donner des exemples issus du cours d'analyse.

II - **Nombres complexes et polynômes**

1 - **Nombres complexes**

L'objectif de l'étude des nombres complexes est d'aboutir au théorème de d'Alembert-Gauss et à la factorisation dans $\mathbf{R}[X]$ *et* $\mathbf{C}[X]$ *de polynômes à coefficients réels. La construction de* $\mathbf{C}$ *est hors programme et les acquis de la classe de terminale seront complétés. On évitera toute manipulation trop technique faisant intervenir les nombres complexes. Les résultats concernant les racines* n*-èmes de l'unité ne sont pas exigibles des étudiants.*

Notation algébrique d'un nombre complexe, partie réelle et partie imaginaire. Conjugué d'un nombre complexe.	On donnera l'interprétation géométrique d'un nombre complexe.
Notation exponentielle. Module, argument. Formules d'Euler et de Moivre.	Brève révision de la trigonométrie. Formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$. Les racines n-èmes de l'unité pourront être étudiées comme exemples d'utilisation de la notation exponentielle.

2 - **Polynômes**

La construction des polynômes formels n'est pas au programme, on pourra identifier polynômes et fonctions polynomiales. Les démonstrations des résultats de ce paragraphe ne sont pas exigibles.

Ensemble $\mathbf{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$. Opérations algébriques.	
Degré.	Par convention $\deg(0) = -\infty$.
Ensembles $\mathbf{K}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ de degré au plus n.	
Division euclidienne.	Multiples et diviseurs. ▶
Racines, ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation de la multiplicité par factorisation d'une puissance de $(X-a)$.	Cas du trinôme. ▶
Théorème de d'Alembert-Gauss.	Résultat admis. Exemples simples de factorisation dans $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{R}[X]$ de polynômes de $\mathbf{R}[X]$. Les méthodes devront être indiquées.

III - **Algèbre linéaire**

L'objet de ce chapitre est de mettre en place l'outil vectoriel dès le premier semestre, afin de confronter rapidement les étudiants aux notions étudiées dans le cours d'algèbre linéaire.

Dans un premier temps, on présentera la notion de matrices et l'on familiarisera les étudiants à la manipulation de ces objets avant d'en aborder les aspects vectoriels.

L'étude de ce chapitre pourra être menée en lien avec l'algorithmique en ce qui concerne le calcul matriciel. ▶

1 - Calcul matriciel

a) Matrices rectangulaires

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$.

Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.	Addition, multiplication par un scalaire. ▶
Produit matriciel.	On pourra faire le lien entre le produit AB et le produit de A avec les colonnes de B. ▶
Transposée d'une matrice. Transposition d'un produit.	Notation ${}^tA$.

b) Cas des matrices carrées

Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$. Matrices triangulaires, diagonales, symétriques, antisymétriques.	
Matrices inversibles, inverse d'une matrice. Ensemble $GL_n(\mathbf{K})$.	On admettra que pour une matrice carrée, un inverse à gauche ou à droite est l'inverse.
Inverse d'un produit. Transposition de l'inverse.	
Formule donnant l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2.	

2 - Systèmes linéaires

Tout développement théorique est hors programme.

Définition d'un système linéaire. Écriture matricielle d'un système linéaire. Système homogène. Système de Cramer.	
Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.	La méthode sera présentée à l'aide d'exemples. On adoptera les notations suivantes pour le codage des opérations élémentaires sur les lignes : $L_i \leftarrow L_i + aL_j$ avec $i \neq j$, $L_i \leftarrow aL_i$ $(a \neq 0)$, $L_j \leftrightarrow L_i$, $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ $(a \neq 0, i \neq j)$. ▶
Calcul de l'inverse de la matrice A par la résolution du système $AX = Y$. Inversibilité des matrices triangulaires, diagonales.	

3 - Introduction aux espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Cette première approche des espaces vectoriels permet d'introduire le vocabulaire et sera accompagnée de nombreux exemples.

Il sera possible, à l'occasion d'autres chapitres en analyse ou probabilité, de rappeler la structure d'espace vectoriel des ensembles les plus courants, afin de familiariser les étudiants avec le vocabulaire et les notions fondamentales, avant une étude plus approfondie des espaces vectoriels au second semestre.

Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels sur **K**. *Les notions de corps, d'algèbre et de groupe sont hors programme.*

Structure d'espace vectoriel. Sous-espaces vectoriels.	Cette étude doit être accompagnée de nombreux exemples issus de l'algèbre (espaces $\mathbf{K}^n$, espaces de polynômes, espaces de matrices), de l'analyse (espaces de suites, de fonctions).
Combinaisons linéaires. Sous-espace engendré.	On ne considèrera que des combinaisons linéaires de familles finies. Une famille finie d'un espace vectoriel E est la donnée d'une liste finie $(x_1, ..., x_n)$ de vecteurs de E. Le cardinal de cette famille est n.
Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base.	On se limitera à des familles et des bases de cardinal fini. Exemple de la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

IV - **Suites de nombres réels**

L'objectif de ce chapitre est de familiariser les étudiants dès le premier semestre avec des méthodes d'analyse. La construction de **R** *est hors programme et le théorème de la borne supérieure est admis.*

1 - **Vocabulaire sur l'ensemble R des nombres réels**

Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	
Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure d'une partie non vide de **R**.	Quand il existe, le maximum de A coincide avec la borne supérieure de A.
Théorème de la borne supérieure.	Résultat admis.
Partie entière d'un réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$. La notation $E(.)$ est réservée à l'espérance mathématique.

2 - **Exemples de suites réelles**

Suites arithmético-géométriques.	On se ramenera au cas d'une suite géométrique.
Suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 à coefficients réels. Équation caractéristique.	Cette partie pourra être l'occasion d'illustrer, dans un cas concret, les notions de famille libre, génératrice et de base. Dans le cas de racines complexes conjuguées α et $\overline{\alpha}$, on pourra introduire les suites $(\mathrm{Re}(\alpha^n))$ et $(\mathrm{Im}(\alpha^n))$. $\boxed{\blacktriangleright}$

3 - **Convergence des suites réelles - Théorèmes fondamentaux**

Limite d'une suite, suites convergentes.	On dit que (u_n) converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux. On donnera une définition quantifiée de la limite ℓ (traduction en ε, n_0) sans en faire une utilisation systématique.
Généralisation aux suites tendant vers $\pm\infty$.	
Unicité de la limite. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement. Suites monotones, croissantes, décroissantes, suites adjacentes.	
Théorème de limite monotone.	Toute suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée) converge, la limite étant la borne supérieure (respectivement inférieure) de l'ensemble des valeurs de la suite. Une suite croissante non majorée (respectivement décroissante non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.	
Rappel des croissances comparées.	Comparaisons des suites $(n!)$, (n^a), (q^n), $(\ln(n)^b)$.

V - **Fonctions réelles d'une variable réelle**

En analyse, on évitera la recherche d'hypothèses minimales, tant dans les théorèmes que dans les exercices et problèmes, préférant des méthodes efficaces pour un ensemble assez large de fonctions usuelles.

Pour les résultats du cours, on se limite aux fonctions définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$. *Les étudiants doivent savoir étudier les situations qui s'y ramènent simplement.*

L'analyse reposant largement sur la pratique des inégalités, on s'assurera que celle-ci est acquise à l'occasion d'exercices.

Aucune démonstration n'est exigible des étudiants.

1 - **Limite et continuité d'une fonction d'une variable en un point**

Définition de la limite et de la continuité d'une fonction d'une variable en un point. Unicité de la limite. Limites à droite et à gauche. Extension au cas où f est définie sur $I \setminus \{x_0\}$. Extension de la notion de limite en $\pm\infty$ et aux cas des limites infinies.	On adoptera la définition suivante : f étant une fonction définie sur I, x_0 étant un élément de I ou une extrémité de I, et ℓ un élément de $\mathbf{R}$, on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $\lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \varepsilon$; ainsi, lorsque x_0 appartient à I, f est continue en x_0, sinon f se prolonge en une fonction continue en x_0.

Opérations algébriques sur les limites. Compatibilité avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement. Prolongement par continuité en un point.	
Si f admet une limite ℓ en x_0 et si (u_n) est une suite réelle définie sur I et tendant vers x_0, alors $(f(u_n))$ tend vers ℓ. Limite d'une fonction composée.	La caractérisation séquentielle de la limite n'est pas au programme.

2 - Étude globale des fonctions d'une variable sur un intervalle

Fonctions paires, impaires, périodiques. Fonctions majorées, minorées, bornées, monotones.	
Théorème de limite monotone.	Toute fonction monotone sur $]a, b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$. Comportement en a et b.
Fonctions continues sur un intervalle, opérations algébriques, composition.	
Fonction continue par morceaux.	Une fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$. On exclut toute étude approfondie des fonctions continues par morceaux.
Théorème des valeurs intermédiaires.	
L'image d'un intervalle (respectivement un segment) par une fonction continue est un intervalle (respectivement un segment).	Notations $\max\limits_{[a,b]} f$ et $\min\limits_{[a,b]} f$.
Théorème de la bijection.	Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. Sa bijection réciproque est elle-même continue et a le même sens de variation. On utilisera ce résultat pour l'étude des équations du type $f(x) = k$. En liaison avec l'algorithmique, méthode de dichotomie. ▶
Représentation graphique de la fonction réciproque.	

3 - Dérivation

Dérivées à gauche et à droite. Dérivée en un point.	Interprétation graphique. ▶

Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit, dérivée d'une composée. Exemples.	
Fonctions dérivables sur un intervalle, fonction dérivée. Dérivée d'un polynôme.	Notation f'.
Dérivation des fonctions réciproques.	
Théorème de Rolle.	
Égalité et inégalités des accroissements finis.	(1) Si $m \leqslant f' \leqslant M$ sur un intervalle I, alors : $\forall (a,b) \in I^2$, $a \leqslant b$, $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$. (2) Si $\lvert f' \rvert \leqslant k$ sur un intervalle I, alors : $\forall (a,b) \in I^2, \quad \lvert f(b) - f(a) \rvert \leqslant k \lvert b-a \rvert$. Application, sur des exemples, à l'étude de suites récurrentes du type : $u_{n+1} = f(u_n)$. Tout exposé théorique sur les suites récurrentes générales est exclu. $\boxed{\blacktriangleright}$
Caractérisation des fonctions constantes et monotones par l'étude de la dérivée.	Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geqslant 0$ sur I, f' ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
Définition et dérivation de la fonction Arctan.	L'étude de cette fonction se limitera strictement à ces deux points.

4 - **Intégration sur un segment**

La construction de l'intégrale de Riemann est hors programme.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.	
Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.	Résultat admis.
Intégrale d'une fonction continue sur un segment. Relation de Chasles.	Si f est continue sur un intervalle I, pour tout $(a,b) \in I^2$, on définit l'intégrale de f de a à b par : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a),$ où F est une primitive de f sur I. Cette définition est indépendante du choix de la primitive F de f sur I.
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.	
Linéarité, relation de Chasles, positivité et croissance. Cas d'une fonction continue, positive sur $[a,b]$ et d'intégrale nulle.	Si f est continue sur $[a,b]$ et $a \leqslant b$, $\displaystyle\left\lvert \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right\rvert \leqslant \int_a^b \lvert f(t) \rvert \mathrm{d}t.$
Intégration par parties.	
Changement de variable.	Les changements de variable non affines devront être indiqués aux candidats.

Sommes de Riemann à pas constant.	La convergence des sommes de Riemann ne sera démontrée que dans le cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Interprétation de l'intégrale en termes d'aire. ▶

VI - **Probabilités sur un univers fini**

L'objectif de cette première approche est de mettre en place un cadre simplifié mais formalisé dans lequel on puisse mener des calculs de probabilités sans difficulté théorique majeure.

Dans la continuité du programme de terminale, l'étude préalable du cas fini permettra de consolider les acquis et de mettre en place, dans des situations simples, les concepts probabilistes de base, en ne faisant appel qu'aux opérations logiques et arithmétiques élémentaires. C'est pourquoi, pour le premier semestre, on se restreindra à un univers Ω fini, muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.

On évitera pour cette première approche un usage avancé de la combinatoire, et l'on s'attachera à utiliser le vocabulaire général des probabilités.

1 - **Généralités**

a) **Observation d'une expérience aléatoire - Événements**

Expérience aléatoire. Univers Ω des résultats observables, événements. Opérations sur les événements, événements incompatibles.	On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples. On fera le lien entre ces opérations et les connecteurs logiques.
Système complet d'événements fini.	Une famille $(A_i)_{i \in I}$, où I est un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$, est un système complet si elle vérifie les conditions deux suivantes : • $A_i \cap A_j = \emptyset$ • $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \Omega$.

b) **Probabilité**

Définition d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.	Une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est une application additive P à valeurs dans $[0, 1]$ et vérifiant $P(\Omega) = 1$. Cas de l'équiprobabilité.
Notion d'espace probabilisé.	Lors du premier semestre, on se restreindra à la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.
Formule de Poincaré ou du crible pour deux et trois événements.	

c) **Probabilité conditionnelle**

Probabilité conditionnelle.	Notation P_A. P_A est une probabilité. $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P_A)$ est un espace probabilisé.

Formule des probabilités composées.	• Si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$. • Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors : $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$.
Formule des probabilités totales.	Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet fini, alors pour tout événement B on a : $P(B) = \sum\limits_{i \in I} P(B \cap A_i)$.
Formule de Bayes.	On donnera de nombreux exemples d'utilisation de ces formules.

d) **Indépendance en probabilité**

Indépendance de deux événements.	Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$. On remarquera que la notion d'indépendance est relative à la probabilité.
Indépendance mutuelle de n événements. Si n événements A_1, ..., A_n sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.	

2 - Variables aléatoires réelles

On introduit dans cette section la notion de variable aléatoire réelle définie sur un univers fini. Les variables aléatoires sont alors à valeurs dans un ensemble fini, ce qui simplifie la démonstration des formules.

Une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est une application de Ω dans $\mathbf{R}$.	On adoptera les notations habituelles telles que $[X \in I]$, $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc.
Système complet associé à une variable aléatoire.	
Fonction de répartition d'une variable aléatoire X.	$F_X(x) = P(X \leqslant x)$.
Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle.	La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire.
Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur $X(\Omega)$. Étude de la loi de $Y = g(X)$.	On se limitera à des cas simples, tels que $g(x) = ax + b$, $g(x) = x^2$, ...
Espérance d'une variable aléatoire.	$E(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.
Théorème de transfert.	$E(g(X)) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$. Théorème admis.
$E(aX + b) = aE(X) + b$.	
Variance et écart-type d'une variable aléatoire. Cas particulier où $V(X) = 0$.	Notations $V(X)$ et $\sigma(X)$.
Calcul de la variance. $V(aX + b) = a^2V(X)$.	Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
Variables centrées, centrées réduites.	Notation X^* pour la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

3 - **Lois usuelles**

Variable aléatoire certaine.	
Loi de Bernoulli, espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Variable indicatrice d'un événement. Notation $\mathbf{1}_A$.
Loi binomiale.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
Coefficients binomiaux, notation $\binom{n}{p}$. Formule du triangle de Pascal.	En lien avec le programme de terminale, le nombre $\binom{n}{p}$ sera introduit comme le nombre de chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire. ▶
Formules $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.	
Formule du binôme de Newton donnant $(a+b)^n$.	Lorsque a et b sont strictement positifs, on pourra faire le lien avec la loi $\mathcal{B}(n, \frac{a}{a+b})$. ▶
Espérance et variance d'une variable de loi binomiale.	
Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, espérance, variance.	Application, à l'étude de la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$, où $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$. ▶

4 - **Compléments de combinatoire**

Dénombrement des ensembles suivants : • parties d'un ensemble à n éléments ; • parties à p éléments d'un ensemble à n éléments ; • p-listes d'un ensemble à n éléments ; • p-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments ; • permutations d'un ensemble à n éléments.	On fera le lien entre les parties à p éléments d'un ensemble à n éléments et le nombre de chemins d'un arbre réalisant p succès pour n répétitions. On pourra utiliser la représentation arborescente d'un ensemble de p-listes dans les problèmes de dénombrement.

Enseignement de mathématiques du second semestre

I - **Algèbre linéaire**

L'objectif de ce chapitre est d'approfondir et compléter les notions vues au premier semestre.

1 - **Espaces vectoriels de dimension finie**

Espaces admettant une famille génératrice finie.
Existence de bases.
Si L est libre et si G est génératrice, le cardinal de L est inférieur ou égal au cardinal de G.

Dimension d'un espace vectoriel.	Notation $\dim(E)$.
Caractérisation des bases.	Dans un espace vectoriel de dimension n, une famille libre ou génératrice de cardinal n est une base.
Rang d'une famille finie de vecteurs. Théorème de la base incomplète. Dimension d'un sous-espace vectoriel.	Si F est un sous-espace vectoriel de E et si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

2 - Compléments sur les espaces vectoriels

Somme de deux sous-espaces vectoriels.	
Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires. Somme et somme directe de k sous-espaces vectoriels. Existence d'un supplémentaire en dimension finie. Dimension d'une somme de deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.	Tout vecteur de la somme se décompose de manière unique.
Dimension d'un supplémentaire.	Si F et G sont supplémentaires, $$\dim(F) + \dim(G) = \dim(E).$$ Caractérisation de $E = F \oplus G$ par la dimension et l'intersection de F et G.
Dimension d'une somme directe de k espaces vectoriels.	Base adaptée à une somme directe.
Concaténation de bases de sous espaces vectoriels.	Caractérisation de sommes directes par concaténation des bases.

3 - Applications linéaires

a) **Cas général**

Définition d'une application linéaire de E dans F. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.	
Composée de deux applications linéaires. Isomorphismes.	Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.
Endomorphismes, espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E. Noyau et image d'une application linéaire.	Puissances d'un endomorphisme.
Projecteurs associés à deux espaces supplémentaires.	Caractérisation des projecteurs par la relation $p^2 = p$.

b) **Cas de la dimension finie**

Rang d'une application linéaire.	Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E alors la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ engendre $\mathrm{Im}(f)$. Lien entre recherche de l'image et résolution de système. $\boxed{\blacktriangleright}$
Formule du rang.	Si E et F sont des espaces vectoriels, E étant de dimension finie, et une application linéaire u de E dans F, $\dim E = \dim(\mathrm{Ker}\ u) + \dim(\mathrm{Im}\ u)$. Application à la caractérisation des isomorphismes.
Formes linéaires et hyperplans.	

c) **Matrices et applications linéaires**

Matrice d'une application linéaire dans des bases.	Si $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont des bases respectives de E et F, notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$. Matrices lignes et formes linéaires.
Vecteur colonne des coordonnées dans une base $\mathcal{B}_E$. Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Lien du produit matriciel avec la composition des applications linéaires.	$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$.
Rang d'une matrice.	Égalité des rangs d'une application linéaire et de sa matrice dans des bases.
Une matrice et sa transposée ont même rang.	Résultat admis.

d) **Cas des endomorphismes et des matrices carrées**

Matrice d'un endomorphisme f de E dans la base $\mathcal{B}$.	Notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
Formule du binôme pour deux endomorphismes ou deux matrices carrées qui commutent.	
Automorphismes. Ensemble $GL(E)$ des automorphismes de E.	
Matrices inversibles, inverse d'une matrice. Ensemble $GL_n(\mathbf{K})$.	Lien avec les isomorphismes et avec $GL(E)$.
Lien entre les isomorphismes de E et les matrices inversibles.	On pourra démontrer que pour le produit matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'inverse à gauche est également un inverse à droite.
Polynôme d'endomorphisme, polynôme de matrice carrée. Polynôme annulateur.	Exemples de calcul d'automorphismes réciproques, d'inverses de matrices et de puissances k-ème d'une matrice par utilisation d'un polynôme annulateur. Toute théorie générale sur les polynômes annulateurs est exclue.

II - **Compléments d'analyse**

1 - Étude asymptotique des suites

Suite négligeable.	Notation $u_n = o(v_n)$. On présentera à nouveau les croissances comparées rappelées au premier semestre.
Suites équivalentes.	Notation $u_n \sim v_n$. $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$.
Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance.	

2 - Comparaison des fonctions d'une variable au voisinage d'un point

Fonction négligeable au voisinage de x_0.	Notation $f = o(g)$.
Fonctions équivalentes au voisinage de x_0.	Notation $f \underset{x_0}{\sim} g$. $f \underset{x_0}{\sim} g \iff f = g + o(g)$.
Extension au cas $x_0 = \pm\infty$.	
Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance.	
Comparaison des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes au voisinage de l'infini, des fonctions puissances et logarithmes en 0.	On présentera à nouveau les croissances comparées rappelées au premier semestre.

3 - Séries numériques

Série de terme général u_n. Sommes partielles associées.	On soulignera l'intérêt de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ pour l'étude de la suite (u_n). $\boxed{\blacktriangleright}$
Convergence d'une série, somme et reste d'une série convergente. Combinaison linéaire de séries convergentes.	
Convergence des séries à termes positifs dans les cas $u_n \leqslant v_n$ et $u_n \sim v_n$. Définition de la convergence absolue.	Résultat admis.
La convergence absolue implique la convergence.	On remarquera que toute série absolument convergente est la différence de deux séries à termes positifs convergentes.
Convergence des séries dans le cas $u_n = o(v_n)$ où (v_n) est une série convergente à termes positifs.	Résultat admis.
Convergence des séries de Riemann.	
Convergence et formules de sommation des séries géométriques et de leurs deux premières dérivées.	
Série exponentielle.	$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. Ce résultat pourra être démontré à l'aide de la formule de Taylor. $\boxed{\blacktriangleright}$

4 - Intégrales sur un intervalle quelconque

On évitera toute technicité dans ce chapitre dont l'objectif est d'introduire les outils utiles à l'étude des variables aléatoires à densité.

Intégration sur un intervalle semi-ouvert. Convergence de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b[$ $(-\infty < a < b \leqslant +\infty)$.

On dira que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ existe et est finie.
On pose alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\mapsto b}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Règles de calcul sur les intégrales convergentes, linéarité, relation de Chasles, positivité, inégalités.
Cas d'une fonction continue, positive sur $[a, b[$ et d'intégrale nulle.

Les techniques de calcul (intégration par parties, changement de variables non affine) seront pratiquées sur des intégrales sur un segment.

Cas des fonctions positives.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.

Théorèmes de convergence pour f et g positives au voisinage de b, dans les cas où $f \leqslant g$ et $f \underset{b}{\sim} g$.

Théorèmes admis.

Définition de la convergence absolue.

La convergence absolue implique la convergence.

On remarquera que toute fonction continue est la différence de deux fonctions continues positives.

Théorèmes de convergence dans le cas $f = o(g)$ avec g positive au voisinage de b.

Théorème admis.

Extension des notions précédentes aux intégrales sur un intervalle quelconque.

Brève extension aux fonctions définies et continues sur $]a_1, a_2[\cup]a_2, a_3[\cup\cdots\cup]a_{p-1}, a_p[$.

Convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.

5 - Dérivées successives

Fonction p fois dérivable en un point.

Notation $f^{(p)}$.

Fonctions de classe C^p, de classe C^∞ sur un intervalle. Opérations algébriques, formule de Leibniz. Théorème de composition.
La dérivée $(n+1)$-ème d'un polynôme de degré au plus n est nulle.

6 - Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral.
Inégalité de Taylor-Lagrange.

Ces formules seront données à l'ordre n pour une fonction de classe C^{n+1}.

Application à la caractérisation de la multiplicité d'une racine a d'un polynôme P de $\mathbf{R}[X]$ par l'étude des dérivées $P^{(k)}(a)$.

7 - Développements limités

L'étude des développements limités ne constitue pas une fin en soi et l'on se gardera de tout excès de technicité dans ce domaine. La composition des développements limités n'est pas au programme. On se limitera, en pratique, à des développements limités au voisinage de 0.

Définition d'un développement limité.	On fera le lien entre un développement limité à l'ordre 1 et la valeur de la dérivée. On pourra introduire et manipuler la notation $x^n\varepsilon(x)$ avant l'utilisation éventuelle de la notation $o(x^n)$.
Somme et produit de développements limités.	
Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe C^n. Application de la formule de Taylor-Young au développement limité de fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, sinus et cosinus).	Résultat admis.

8 - Extremum

Pour préparer l'introduction des notions de topologie du programme de deuxième année, on insistera sur la différence entre la recherche d'extremum sur un segment et la recherche d'extremum sur un intervalle ouvert.

Toute fonction continue sur un segment admet des extrema globaux sur ce segment.	
Dans le cas d'une fonction de classe C^1 : condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un intervalle ouvert. Définition d'un point critique.	On pourra montrer que le résultat tombe en défaut lorsque l'intervalle de définition n'est pas ouvert.
Condition suffisante d'existence d'un extremum local en un point critique pour une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert.	Ce résultat sera démontré grâce au développement limité à l'ordre 2.

9 - Fonctions convexes

Tous les résultats de cette section seront admis.

Définition des fonctions convexes, fonctions concaves. Point d'inflexion.	Une fonction est convexe sur un intervalle I si $\forall (x_1,x_2) \in I^2, \forall (t_1,t_2) \in [0,1]^2$ tels que $t_1+t_2=1$, $f(t_1x_1+t_2x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$. Interprétation géométrique. $\boxed{\blacktriangleright}$
Généralisation de l'inégalité de convexité.	

Caractérisation des fonctions convexes de classe C^1.

Les étudiants devront savoir que si f est de classe C^1, alors f est convexe si et seulement si l'une des deux propositions est vérifiée :
- f' est croissante ;
- C_f est au-dessus des tangentes.

Caractérisation des fonctions convexes et concaves de classe C^2.

III - Probabilités sur un univers quelconque

Dans ce second temps de l'étude des probabilités, le vocabulaire général est adopté et complété (en particulier le vocabulaire " espace probabilisé " et la notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$), mais aucune difficulté théorique ne sera soulevée sur ce cadre. L'étude des variables aléatoires et notamment celles des lois usuelles se fera en lien étroit avec la partie informatique du programme. ▶

1 - Espace probabilisé

Tribu d'événements ou σ-algèbre d'événements.
Généralisation de la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω.

Notation $\mathcal{A}$.
On pourra donner quelques exemples significatifs d'événements de la forme :
$A = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.
On fera le lien avec le cas des univers finis en expliquant que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.
On pourra introduire différentes tribus sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et montrer que le choix de la tribu dépend de l'expérience que l'on cherche à modéliser.

Une probabilité est une application P définie sur la tribu $\mathcal{A}$ à valeurs dans $[0, 1]$, σ-additive telle que $P(\Omega) = 1$.

Tribu engendrée par un système complet d'événements.

Existence admise.

Notion d'espace probabilisé.

Notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Propriétés vraies presque sûrement. Événement négligeable, événement presque sûr.

Théorème de la limite monotone.

- Pour toute suite croissante (A_n) d'événements,
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$
- Pour toute suite décroissante (A_n) d'événements,
$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Conséquences du théorème de la limite monotone.	Pour toute suite (A_n) d'événements, • $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$. • $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$. Les démonstrations de ces formules ne sont pas exigibles. On pourra donner comme exemple d'événement négligeable la réalisation d'une suite infinie de PILE lors d'un jeu de PILE ou FACE.
Généralisation de la notion de probabilité conditionnelle.	Si A vérifie $P(A) \neq 0$, alors $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ est un espace probabilisé.
Généralisation de la formule des probabilités composées.	
Généralisation de la formule des probabilités totales.	
Indépendance mutuelle d'une suite infinie d'événements.	

2 - **Généralités sur les variables aléatoires réelles**

Définition.	Une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout réel x, $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}$ est dans la tribu $\mathcal{A}$. On adoptera les notations habituelles $[X \in I]$, $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc. On pourra, à l'aide d'exemples, illustrer comment obtenir des événements du type $[X = x]$ ou $[a \leqslant X < b]$ à partir d'événements du type $[X \leqslant x]$.
Fonction de répartion d'une variable réelle.	$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X(x) = P(X \leqslant x)$.
Propriétés.	F_X est croissante et continue à droite en tout point, $\lim_{-\infty} F_X = 0$, $\lim_{+\infty} F_X = 1$.
Loi d'une variable aléatoire.	La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire. Résultat admis.

3 - **Variables aléatoires réelles discrètes**

On commencera cette section en expliquant comment les résultats vus précédemment se prolongent dans le cadre général et l'on insistera sur les problèmes de convergence de séries que l'on rencontre lors de l'étude de variables aléatoires infinies.

Définition d'une variable aléatoire réelle discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.	L'ensemble des valeurs prises par ces variables aléatoires sera indexé par une partie finie ou infinie de $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{Z}$.
Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire discrète par la donnée des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.	

Tribu engendrée par une variable aléatoire discrète.	La tribu $\mathcal{A}_X$ des événements liés à X est la tribu engendrée par le système complet $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$. Cette tribu est aussi appelée tribu engendrée par la variable aléatoire X et constitue l'information apportée par X.
Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. Étude de la loi de $Y = g(X)$.	
Espérance d'une variable aléatoire.	Quand $X(\Omega)$ est infini, X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente.
Théorème de transfert.	Quand $X(\Omega)$ est infini, $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ est absolument convergente, et alors $E(g(X)) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$. Théorème admis.
$E(aX + b) = aE(X) + b$.	
Moment d'ordre r ($r \in \mathbf{N}$).	Notation $m_r(X) = E(X^r)$.
Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète.	Notations $V(X)$ et $\sigma(X)$.
Calcul de la variance. $V(aX + b) = a^2V(X)$.	Formule de Koenig-Huygens : $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$
Cas particulier où $V(X) = 0$.	
Variables centrées, centrées réduites.	Notation X^* pour la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

4 - Lois de variables discrètes usuelles

Lois discrètes usuelles à valeurs dans un ensemble fini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.	On généralisera les lois $\mathcal{B}(p)$, $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{U}(⟦a, b⟧)$ vues lors du premier semestre. $\boxed{\blacktriangleright}$
Loi géométrique (rang d'apparition d'un premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire). Espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. $\boxed{\blacktriangleright}$ Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, pour tout nombre entier naturel non nul k, $$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$
Loi de Poisson : définition, espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. $\boxed{\blacktriangleright}$

5 - Introduction aux variables aléatoires à densité

Définition d'une variable aléatoire à densité.	On dit qu'une variable aléatoire X est à densité si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points.
Toute fonction f_X à valeurs positives, qui éventuellement ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de points, est une densité de X.	Pour tout x de $\mathbf{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$.

Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire à densité par la donnée d'une densité f_X.

Toute fonction f positive, continue sur $\mathbf{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$ est la densité d'une variable aléatoire.

Résultat admis.

Transformation affine d'une variable à densité.

Les étudiants devront savoir calculer la fonction de répartition et la densité de $aX + b$ $(a \neq 0)$.

Espérance d'une variable à densité.

Variables aléatoires centrées.

Une variable aléatoire X de densité f_X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente ; dans ce cas, $\mathrm{E}(X)$ est égale à cette intégrale.

Exemples de variables aléatoires n'admettant pas d'espérance.

$E(aX + b) = aE(X) + b$.

6 - Lois de variables à densité usuelles

Loi uniforme sur un intervalle. Espérance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$. ▶

$X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1] \Longleftrightarrow Y = a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$.

Loi exponentielle. Caractérisation par l'absence de mémoire. Espérance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. ▶

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Longleftrightarrow Y = \frac{1}{\lambda}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \quad (\lambda > 0).$$

Loi normale centrée réduite, loi normale (ou de Laplace-Gauss). Espérance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. ▶

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ avec } \sigma > 0.$$

On attend des étudiants qu'ils sachent représenter graphiquement les fonctions densités des lois normales et utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.

7 - Convergences et approximations

a) **Convergence en probabilité**

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour les variables aléatoires discrètes.

Si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors pour tout $\lambda > 0$:

$$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E(X)}{\lambda}.$$

Pour toute variable X admettant espérance et variance, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Convergence en probabilité : si (X_n) et X sont des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, (X_n) converge en probabilité vers X si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P([|X_n - X| > \varepsilon]) = 0$.

Notation $X_n \xrightarrow{P} X$.

Loi faible des grands nombres pour la loi binomiale.

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $(\frac{1}{n}X_n)$ converge en probabilité vers p. ▶
La loi faible des grands nombres permet une justification partielle, a posteriori, de la notion de probabilité d'un événement, introduite intuitivement.

b) **Convergence en loi**

Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires vers X.

Notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Cas où les X_n et X sont à valeurs dans $\mathbf{N}$.

Si (np_n) tend vers un réel strictement positif λ, convergence d'une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ vers une variable suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

Théorème limite central pour la loi binomiale et pour la loi de Poisson.

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ (respectivement $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$), alors la suite de variables aléatoires centrées réduites (X_n^*) converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Théorème admis. ▶

Enseignement annuel d'informatique et algorithmique

I - Éléments d'informatique et d'algorithmique

L'objectif est d'initier les étudiants à l'algorithmique et à l'utilisation de l'informatique en mathématiques au travers de thèmes empruntés au programme pour comprendre, illustrer et éclairer les notions introduites. Dès qu'un calcul numérique est envisagé, dès qu'un problème incite à tester expérimentalement un résultat, dès qu'une situation aléatoire peut être modélisée avec des outils informatiques, le recours à des algorithmes et des logiciels devra devenir naturel.
Le logiciel retenu pour la programmation dans ce programme des classes économiques et commerciales est Scilab.
L'utilisation du logiciel se fait en continuité avec le cours de mathématiques et sera suivi d'une mise en œuvre sur ordinateur. Seules les notions de Scilab indiquées dans le programme sont exigibles.

1 - L'environnement logiciel Scilab

a) **Constantes prédéfinies. Création de variables par affectation.**

`%pi %e`

Approximations de π et e.

Affectation : $\boxed{\text{nom = expression}}$

`//` permet de commenter une commande.

L'expression peut être du type numérique, matricielle ou du type chaîne de caractères.

b) **Constructions de vecteurs et de matrices numériques.**

Vecteurs lignes : `[ , ,..., ]`
Vecteurs colonnes : `[;;...; ]`
Matrices $n \times p$: `[ ,..., ;...; ,..., ]`

c) **Opérations élémentaires**

Opérations arithmétiques :

+	-	*	/	^

Les opérations arithmétiques de base s'appliquent aux variables numériques ou matricielles.

Comparaisons - tests :

==	>	<	>=	<=	<>

Logiques

&	|
and	or

d) **Fonctions usuelles prédéfinies**

Fonctions numériques usuelles :
`log, exp, floor, abs, sqrt, sin, cos`

Toutes ces fonctions peuvent s'appliquer à des variables numériques ou à des matrices élément par élément.

Fonctions `rand`	La fonction `grand` pourra être utilisée avec les paramètres correspondant aux lois de probabilité présentes dans le programme.
Fonctions matricielles : `rank(A), inv(A), A'`	Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne d'une matrice. On pourra utiliser les fonctions `size(A), find` dans le cadre de simulations. Pratique des opérations et des fonctions matricielles dans des situations concrètes.

2 - **Graphisme en deux dimensions**

Courbes représentatives de fonctions usuelles, de densités et de fonctions de répartition. Tracé d'histogrammes.	On pourra utiliser les fonctions `plot, plot2d, bar, histplot`, la fonction `linspace(a,b,n)` et les opérations `./`, `.*`, `.^`

3 - **Programmation d'algorithmes et de fonctions**

Les structures suivantes seront utilisées :

Structure conditionnelle :
`if ...then ...end`
`if ...then ...else ...end`	

Structures répétitives :
`for k=...: :...end`
`while ...then ...end`
	Exemples : $n!$, $\binom{n}{p}$.

Fonctions - arguments - retour de résultats.	
Fonction d'entrée des données `input()` Fonction de sortie de résultat(s) `disp()`	Saisie au clavier - message indicatif possible. Affichage du contenu d'une variable à l'écran avec commentaire éventuel.

II - **Liste de savoir-faire exigibles en première année**

Calcul des termes d'une suite.	Exploitation graphique des résultats.
Calculs de valeurs approchées de la limite d'une suite ou de la somme d'une série.	On utilisera des structures répétitives et conditionnelles en exploitant l'étude mathématique. La détermination du rang d'arrêt du calcul résultera directement de l'étude mathématique ou d'un algorithme qui en découle.
Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x) = 0$.	On utilisera différentes méthodes dont certaines résulteront d'une étude mathématique (suites récurrentes, encadrements, dichotomie).
Calcul des valeurs approchées d'une intégrale par la méthode des rectangles.	Application au calcul de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
Utilisation de la fonction `rand` pour simuler des expériences aléatoires élémentaires conduisant à une loi usuelle.	Loi binomiale, loi géométrique.

Simulation de phénomènes aléatoires.

Utilisation de la fonction `grand`
On pourra utiliser une simulation pour comparer expérimentalement une loi $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ (n grand) avec la loi de Poisson.
On pourra utiliser une simulation pour comparer expérimentalement une loi binomiale avec une loi normale.

Résolution de systèmes $AX = B$.

Annexe 2

Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **économique et commerciale**

Option : **Scientifique (ECS)**

Discipline : **Economie**

Première et seconde années

Programme d'Économie
CPGE Économique et commerciale, voie scientifique (ECS)

Objectifs généraux

Le programme d’économie a pour objectif de doter les étudiants de la voie scientifique de connaissances qui leur permettront de mieux saisir les enjeux économiques contemporains. La maîtrise des notions et des mécanismes développés dans ce programme sera particulièrement utile aux candidats des concours d’entrée aux grandes écoles de commerce et de management et leur apportera une aide essentielle lors de la poursuite de leurs études dans ces écoles.

Le programme est structuré en quatre modules semestriels.

Module 1. Comprendre l’analyse économique

Orientation générale
On proposera aux étudiants une première approche du raisonnement économique en présentant des éléments d’histoire de la pensée économique, en étudiant le fonctionnement du marché et en posant les bases de l’étude de la monnaie.

1.1/ Éléments d’histoire de la pensée économique
1.1.1. L’analyse libérale : quels fondements ?
1.1.2. L’analyse keynésienne : quels apports ?
1.1.3. Les approches contemporaines : quels débats ?

1.2/ L’économie de marché
1.2.1. Comment le marché fonctionne-t-il ?
1.2.2. Quelles sont les limites et les défaillances du marché ?

1.3/ La monnaie
1.3.1. Qui crée la monnaie ?
1.3.2. Monnaie et prix : quels liens ?

Commentaires
La présentation des éléments d’histoire de la pensée économique vise à donner aux étudiants les bases permettant de différencier les courants de pensée. Cette approche, nécessairement succincte, mettra l’accent sur les grandes oppositions ou continuités et leur

traduction dans les analyses contemporaines. On s'attachera à relier cet aperçu de l'histoire de la pensée aux débats concernant les politiques économiques contemporaines.
Une première approche du fonctionnement du marché, permettra d'initier les étudiants aux concepts de base de l'analyse économique. On abordera le rôle central de l'offre et de la demande et le mécanisme de formation des prix. On présentera les limites du marché.
On montrera l'importance de la monnaie dans l'activité économique. On présentera les mécanismes de la création monétaire et on s'interrogera sur les liens entre monnaie et prix. On abordera ainsi la question des origines de l'inflation et de la déflation et la prise en compte de ces phénomènes par les politiques économiques.

Module 2. Comprendre les enjeux européens dans le cadre de la mondialisation

Orientation générale
On présentera les analyses de l'échange international et les principaux mécanismes monétaires et financiers internationaux. On s'interrogera sur les principaux enjeux de l'intégration européenne.

2.1/ Le commerce international
2.1.1. Pourquoi un pays échange-t-il ?
2.1.2. Pourquoi un pays est-il déficitaire ou excédentaire ?

2.2/ Le système monétaire et financier international
2.2.1. Qu'est-ce qu'un taux de change ?
2.2.2. Qu'est-ce que la globalisation financière ?

2.3/ L'intégration européenne
2.3.1. L'Europe est-elle une zone monétaire optimale ?
2.3.2. Quelles politiques économiques pour l'Europe ?

Commentaires
On s'interrogera sur les déterminants principaux des échanges internationaux, en montrant l'importance des avantages comparatifs, mais en soulignant également l'apport des nouvelles théories et l'importance des stratégies des entreprises à l'échelle planétaire. On s'intéressera aux éléments explicatifs des déséquilibres commerciaux. On pourra à ce titre privilégier l'exemple français.
Sans étudier l'histoire des systèmes monétaires, on différenciera les principaux régimes de change et on présentera les déterminants des taux de change. La globalisation financière sera analysée en soulignant le rôle joué par les firmes multinationales et les marchés.
On replacera l'intégration européenne dans le cadre de la mondialisation en se demandant si l'Europe est une zone monétaire optimale. Puis on analysera les conséquences de cette intégration sur les politiques économiques menées dans le cadre européen.

Module 3 : Comprendre la croissance et les crises

Orientation générale
On s'interrogera sur les causes, les conséquences et la soutenabilité de la croissance. On mettra en évidence l'importance des crises, particulièrement des crises financières et on s'interrogera sur la possibilité d'une régulation financière.

3.1/ La croissance
3.1.1. Quels sont les facteurs de la croissance ?
3.1.2. Quelles sont les finalités de la croissance ?
3.2.2. La croissance est-elle durable ?

3.2/ Les crises

3.2.1. Pourquoi la croissance est-elle irrégulière?
3.2.2. Pourquoi les crises financières surviennent-elles ?
3.2.3. Quelle régulation monétaire et financière ?

Commentaires

On étudiera les sources de la croissance économique, en mettant l'accent sur le rôle des facteurs de production et en soulignant l'importance du progrès technique et des facteurs institutionnels. On réfléchira aux conséquences économiques et sociales de la croissance en s'interrogeant sur ses finalités et sur sa soutenabilité.

On montrera que la croissance est irrégulière et on s'interrogera sur l'origine des fluctuations. On étudiera particulièrement le mécanisme des crises financières en insistant sur leur récurrence, ce qui conduira à se poser la question de la régulation financière et monétaire au niveau régional et international.

Module 4 : Comprendre les politiques économiques

Orientation générale

On étudiera les instruments dont disposent les pouvoirs publics pour agir sur l'économie. À travers quelques exemples on présentera les politiques économiques en action.

4.1/ Les politiques économiques : enjeux et modalités

4.1.1. Quelles sont les justifications de l'intervention économique de l'Etat ?
4.1.2. Quels sont les instruments de la politique économique ?
4.1.3. Quelles sont les contraintes de financement ?

4.2/ Les politiques économiques en action

4.2.1. Relance ou rigueur ?
4.2.2. Comment agir sur l'emploi ?
4.2.3. Comment augmenter le potentiel de croissance ?

Commentaires

On montrera que les États peuvent chercher à répondre aux défaillances et dysfonctionnements des marchés et à réguler l'activité. On étudiera les principaux instruments à disposition des États (budget, monnaie, politiques réglementaires) en différenciant les politiques conjoncturelles des politiques structurelles. A travers l'étude du lien entre les déficits et l'endettement public, on montrera que des contraintes de financement pèsent sur les politiques publiques.

On étudiera les politiques économiques, en montrant que les objectifs poursuivis peuvent être différents selon la conjoncture. On analysera les politiques d'emploi menées depuis les années 1970 et on se demandera comment les États peuvent agir sur le potentiel de croissance, en particulier par des politiques structurelles destinées à accroître la productivité des facteurs et la compétitivité des nations et des entreprises.

Annexe 3
Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **économique et commerciale**

Option : **Scientifique (ECS)**

Discipline : **Histoire, géographie et géopolitique du monde contemporain**

Première et seconde années

Programme d’histoire, géographie et géopolitique du monde contemporain

CPGE économique et commerciale – voie scientifique

Les orientations générales du programme.

Le programme d’histoire, géographie et géopolitique du monde contemporain de la filière économique et commerciale, voie scientifique, est dans la continuité de celui de 2004 tout en tenant compte de la rénovation des programmes d’histoire-géographie de l’enseignement secondaire ainsi que du renouvellement des approches méthodologiques et conceptuelles intervenues depuis.

Le programme est structuré en quatre modules semestriels dont le premier à pour objectif de faciliter la transition entre l’enseignement secondaire et l’enseignement supérieur. Chaque module est accompagné d’un commentaire qui précise l’esprit du programme et le cadre dans lequel il peut être traité.

L’ensemble du programme favorise l’adaptation des étudiants aux méthodes de l’enseignement supérieur. Il s’inscrit dans les modalités de parcours des études supérieures de l’espace européen, telles qu’elles sont définies par les textes en vigueur. Il prend également en compte les objectifs de formation des écoles de commerce et de gestion, notamment en favorisant une réflexion d’ensemble sur le monde contemporain. L’importance accordée à l’entreprise, la recherche d’une approche géographique globale et la part consacrée aux débats géopolitiques et géoéconomiques permettent l’acquisition de repères essentiels pour la culture des futurs acteurs de l’économie.

Le programme propose de combiner les approches historique, géographique et géopolitique.

L’enseignement de l’histoire ne se réduit pas à une simple étude chronologique des faits économiques et sociaux mais s’inscrit dans un cadre plus large, à l’écart de toute modélisation abusive. Il prend notamment en compte les aspects politiques et culturels, scientifiques et techniques.

Les orientations de la géographie expliquent la place donnée aux questions à caractère spatial, territorial et géopolitique. La préférence accordée en seconde année à la dynamique géographique des continents favorise une vision des lignes de force de l’évolution du monde actuel. S’appuyant sur une démarche multiscalaire, l’approche géodynamique continentale est privilégiée.

Articulant histoire et géographie, l’analyse géopolitique met l’accent sur les rivalités de pouvoirs et les rapports de forces dans l’espace qui structurent le monde contemporain. Elle insiste sur les jeux d’acteurs, leurs systèmes de représentation et leurs stratégies.

Lôorganisation du programme et de lôévaluation.

La dimension synthétique du programme permet de consacrer le temps de la classe à lôacquisition de connaissances, de concepts, de méthodes et dôoutils fondant une réflexion critique sur la complexité du monde contemporain. Le travail prend tout son sens quand le cours est centré sur un chapitre court, ouvert par une introduction problématisée et clos par une conclusion de mise en perspective. Cette démarche favorise lôévaluation en fin de séquence et permet de mesurer la capacité dôargumentation et de synthèse des étudiants, qualités si importantes dans les métiers auxquels ils se préparent. Le travail personnel devient ainsi davantage lôoccasion dôun élargissement par lôindispensable lecture de journaux ou dôouvrages qui complètent le cours du professeur.

La prise en compte des orientations historiques, géographiques et géopolitiques renouvelées conduit le professeur à une réflexion épistémologique indispensable à lôétude des questions abordées. Le programme constitue ainsi un outil de réflexion opératoire et contribue à une évaluation plus approfondie des situations.

Les quatre modules du programme constituent un ensemble étudié en deux années de préparation aux concours dont les conditions sont fixées dans les règlements pédagogiques des écoles de commerce et de gestion. Les modules sont des acquis capitalisables en université.

PROGRAMME DE PREMIERE ANNEE

Les deux premiers modules dressent un panorama du XX ème siècle et du début du XXI ème siècle sous lôangle géopolitique et économique. Ils fixent les principaux repères historiques nécessaires à la compréhension du monde contemporain. Ils sont centrés sur lôanalyse dôun monde en mutations, de la veille de la Première Guerre mondiale à la mondialisation contemporaine. Une place toute particulière est accordée à lôétude de la France.

Module I. Les grandes mutations du monde au XX^{e} siècle (de 1913 au début des années 1990)

I.1 Un monde entre guerres et crises (de 1913 au début des années 1990)
I.1.1. Tableaux géopolitiques du monde en 1913, en 1939 et en 1945
I.1.2. Géopolitique de la guerre froide et de la décolonisation
I.1.3. La construction européenne et ses enjeux

I.2. Lôéconomie mondiale : croissances, ruptures et bouleversements (de 1945 au début des années 1990)
I.2.1. Croissance et types de croissance de 1945 au début des années 1970
I.2.2. Crises et ruptures des années 1970 au début des années 1990
I.2.3. De lôinternationalisation à la mondialisation des productions et des échanges

I.3. La France, une puissance en mutation (de 1945 au début des années 1990)
I.3.1. Les dynamiques économiques et sociales
I.3.2. Les transformations des territoires
I.3.3. La France dans le monde

Commentaire

Le premier module permet de comprendre les grandes mutations de la période et d’acquérir progressivement les méthodes de travail de l’enseignement supérieur. La rupture des années 1990 correspond à la fin de la guerre froide et au plein essor de la mondialisation.

Le premier volet vise à donner un panorama non exhaustif de la période qui va de la première guerre mondiale à la disparition de l’URSS. Il débute par trois tableaux géopolitiques. *Le monde en 1913* souligne le rôle d’une Europe divisée et inégalement industrialisée dans un contexte de première mondialisation et d’impérialismes. *Le monde en 1939* présente un monde instable, fracturé, fragilisé par la crise des années 1930 et la montée des totalitarismes. Après une présentation du monde en 1945, l’étude géopolitique de la guerre froide, de la décolonisation et de la construction européenne s’effectue dans une optique de synthèse et non d’énumération factuelle.
Le deuxième volet est centré sur l’analyse des mutations géoéconomiques mondiales de 1945 aux années 1990. Il met l’accent sur les grands types de croissance – occidental, communiste et du Tiers Monde. L’étude des crises et ruptures des années 1970 aux débuts des années 1990 met en évidence trois grands facteurs : le passage d’un capitalisme fordo-keynésien à un capitalisme libéral, financier et moins régulé; le blocage puis l’effondrement du système soviétique; la crise multiforme du Tiers Monde. Le basculement de l’internationalisation à la mondialisation des productions et des échanges constitue une des principales clés de lecture de la période.

La France fait l’objet d’une étude spécifique. Celle-ci permet de comprendre les profondes mutations économiques, sociales, territoriales et géopolitiques qui l’affectent.

Module II. La mondialisation contemporaine : rapports de force et enjeux

II.1. La mondialisation : acteurs, dynamiques et espaces
II.1.1 Les acteurs : hommes, entreprises, Etats, organisations régionales, organisations internationales, organisations non gouvernementales
II.1.2. Les systèmes productifs et les flux
II.1.3. Territoires, espaces maritimes, terrestres, immatériels et frontières dans la mondialisation

II. 2. La mondialisation : architectures, rivalités et interdépendances
II.2.1. De la « Pax Americana » à un monde multipolaire
II.2.2. Tableau géopolitique du monde actuel
II.2.3. La France à l’heure de la mondialisation

II.3. Les défis du développement et les enjeux d’un monde durable
II.3.1. Les défis du développement durable : démographie, inégalités, santé, alimentation, eau
II.3.2. L’énergie et les matières premières : entre abondance et rareté
II.3.3. La mondialisation en débats

Commentaire

Le deuxième module fournit les principales clés de compréhension de l'organisation du monde depuis la fin de la guerre froide, et ce à toutes les échelles.

L'étude des acteurs permet d'appréhender la complexité de fonctionnement du système mondial. Les stratégies des entreprises organisent un monde en réseaux et forgent une nouvelle division internationale du travail. La compétition qu’elles se livrent et leurs rapports avec les autres acteurs de la mondialisation aboutissent à un monde où les logiques de partenariat et de concurrence interagissent en permanence. Dans le contexte de révolution des transports et des communications, les flux d'hommes, de marchandises, de services, de capitaux et d'informations structurent un espace mondial en profonde recomposition. La place et le rôle des grandes métropoles, la diversité des territoires – espaces terrestres, maritimes, cyberespace, territoires de la mondialisation grise – sont notamment étudiés. L’évolution du rôle et de la nature des frontières est également abordée.

La deuxième partie combine dimensions géopolitiques et géoéconomiques. Elle favorise la compréhension des jeux et rapports de puissance. Le tableau géopolitique du monde actuel prépare tout particulièrement aux modules 3 et 4. Les dynamiques d'intégration et de fragmentation s'observent à toutes les échelles. L'étude de la France, dans le prolongement du module I, s’inscrit dans cette logique.

La troisième partie est l'occasion de réfléchir à la notion de développement. Dans un monde inégalitaire, marqué par des crises multiples (économiques, sanitaires, alimentaires, énergétiques, environnementales), assurer un développement durable à une population en augmentation constitue un défi majeur. Il passe par un accès plus équitable à l’eau, aux matières premières, aux ressources énergétiques, agricoles et alimentaires dans un contexte où la hausse des besoins accroit les risques de pénurie.
Les déséquilibres géoéconomiques et géopolitiques du monde contemporain alimentent les débats sur la mondialisation : opposition protectionnisme/libre-échange, question de la gouvernance mondiale, régulations économiques et financières notamment.

PROGRAMME DE SECONDE ANNEE

Les modules III et IV privilégient une approche synthétique de la géopolitique des continents. A l’exception des Etats-Unis, les pays cités ne font pas l’objet d’une étude spécifique. Ils sont abordés en tant que puissances régionales et dans leur rapport au reste du monde.

Module III. Géodynamique continentale de l’Europe, de l’Afrique, du Proche et du Moyen-Orient

III.1. L’Europe

III.1.1. Identités et diversités
III.1.2. L’Union européenne : élargissements, approfondissements, mutations
III.1.3. Géopolitique de l’Europe

III.2. LôAfrique, le Proche et le Moyen-Orient
III.2.1. Etats, territoires, cultures et sociétés
III.2.2. Les enjeux du développement
III.2.3. Géopolitique de lôAfrique, du Proche et du Moyen-Orient

Commentaire

Le troisième module donne des clefs de compréhension et dôanalyse des spécificités et de la complexité des situations qui prévalent aujourdôhui en Europe, en Afrique et au Proche et Moyen-Orient. Dans ce but, lôhistoire, la géographie et la géopolitique sont associées pour offrir une lecture synthétique qui rende compte de manière à la fois précise, nuancée et critique dôune réalité mouvante.

LôEurope sôentend à lôéchelle dôun continent dont la zone orientale fait partie intégrante. Son histoire, chargée de ruptures et de divisions, en montre aussi les cohérences, en particulier culturelles. Lôétude de lôUnion européenne met en évidence les débats et les choix opérés depuis le début des années 1990, notamment sur les articulations entre approfondissements et élargissements, les modes de gouvernance dans lôUnion, la place et lôaction de celle-ci dans le monde. Les mutations économiques et sociales et leurs conséquences géographiques sont posées à différentes échelles. Lôanalyse géopolitique interne et externe du continent précise le rôle des principales puissances européennes en y incluant celui des pays non-membres de lôUnion européenne, dont la Russie.

Les dynamiques africaines, moyennes et proche-orientales demandent une réflexion sur les effets de la colonisation et de la décolonisation dans la structuration des Etats, des nations et des territoires. On tient compte de la diversité et de lôancienneté des cultures. Lôimportance des ressources est posée comme un des grands enjeux géopolitiques du monde. Les Etats et les populations apparaissent comme acteurs du processus du développement sous la double contrainte de lôinfluence des puissances régionales ï dont les plus importantes pourront utilement servir de points dôappui à lôanalyse - et des interventions extérieures.

Module IV. Géodynamique continentale de lôAmérique et de lôAsie

IV.1. Les Amériques
IV1.1. La construction des territoires et les grandes aires culturelles
IV.1.2. Les Etats-Unis : économie, société, puissance
IV.1.3. LôAmérique latine entre développement, indépendances et dépendances
IV.1.4. Géopolitique des Amériques

IV.2. LôAsie
IV.2.1. Etats, territoires, cultures et sociétés
IV.2.2. Les espaces asiatiques dans la mondialisation
IV.2.3. Géopolitique dôun continent multipolaire, le rôle régional et mondial de la Chine, de lôInde et du Japon

Commentaire

L’étude du continent américain, éclairée par les héritages de la conquête, analyse la mise en valeur de l’espace, la construction des sociétés et des Etats et l’organisation des territoires. Les relations géopolitiques et géoéconomiques entre l’Amérique anglo-saxonne et l’Amérique latine sont posées ainsi que la question des intégrations régionales et continentales qui mettent en évidence le jeu des puissances en Amérique latine. Le rôle du Brésil est abordé du point de vue de son influence régionale et de ses ambitions mondiales. Les Etats-Unis font l’objet d’une approche spécifique.

L’étude du continent asiatique débute par une présentation de l’organisation des Etats et des sociétés. Le recours au temps long permet de comprendre la diversité politique et culturelle du continent.
La place montante de l’Asie dans la mondialisation, l’importance de ses métropoles et de ses façades maritimes, sont mises en valeur. Le module aborde l’étude géopolitique, interne et externe, de ce continent multipolaire et souligne la puissance régionale et mondiale de la Chine, de l’Inde et du Japon.